

Dérivation avancée — composées, optimisation et convexité

Corrigé détaillé
7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Dériver, en posant u et u' .

- ① a. $u = 5x$, $u' = 5$, forme e^u .
 $5 \times 1 = 5$
 $f'(x) = 5e^{5x}$.
- ② b. $u = 2x + 7$, $u' = 2$, forme $\ln u$.
 $2 + 0 = 2$
 $g'(x) = \frac{2}{2x + 7}$.
- ③ c. $u = 3x - 1$, $u' = 3$, forme u^4 de dérivée $4u'u^3$.
 $4 \times 3 = 12$
 $h'(x) = 12(3x - 1)^3$.

2 Composées mêlées.

- ① a. $u = x^2 - 3x$, $u' = 2x - 3$.
 $2 - 3 = -1$
 $f'(x) = (2x - 3)e^{x^2 - 3x}$.
- ② b. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, forme $\sqrt{u}$ de dérivée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
 $2 \div 2 = 1$
 $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, après simplification par 2.
- ③ c. Ici c'est un **produit**, pas une composée : $u = x$ et $v = e^{-x}$.
 $1 - 1 = 0$
- ④ On applique $u'v + uv'$, avec $v' = -e^{-x}$, puis on factorise.
 $1 - 1 = 0$
 $h'(x) = (1 - x)e^{-x}$ — reconnaître la structure avant de dériver est la moitié du travail.

3 Composées trigonométriques et tangente.

- ① a. Pour $f : u = 2x$, $u' = 2$, forme $\sin u$ de dérivée $u' \cos u$.
 $2 \times 1 = 2$
 $f'(x) = 2 \cos(2x)$.
- ② Pour $g : u = x^2$, $u' = 2x$, forme $\cos u$ de dérivée $-u' \sin u$.
 $0 - 2 = -2$
 $g'(x) = -2x \sin(x^2)$ — le signe moins et le facteur u' sont deux oublis distincts.
- ③ b. La pente vaut $f'(0) = 2 \cos 0$.
 $2 \times 1 = 2$
- ④ Et l'ordonnée du point de contact est $f(0) = \sin 0$.
 $2 \times 0 = 0$
la tangente a pour équation $y = 2x$.

4 Variations d'une fonction composée. Soit $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

- ① a. $u = -x^2$, $u' = -2x$, donc $f'(x) = -2x e^{-x^2}$.
 $0 - 2 = -2$
- ② L'exponentielle est strictement positive, donc f' a le signe de $-2x$: positive avant 0, négative après.
 $2 - 2 = 0$
- ③ b. f croît sur $] -\infty ; 0]$ puis décroît : maximum en 0.
 $0 - 0 = 0$
 $f(0) = e^0 = 1$: maximum global égal à 1.

5 Une boîte sans couvercle est fabriquée dans un carton carré de 24 cm de côté, en découpant un carré de côté x à chaque coin.

- ① a. Après pliage, la base mesure $24 - 2x$ de côté et la hauteur vaut x : $V(x) = x(24 - 2x)^2$.
 $24 - 2 \times 4 = 16$
- ② Le côté restant devant être positif, x varie dans $]0 ; 12[$.
 $24 \div 2 = 12$
- ③ b. V' s'annule en 4 et en 12, et 12 est exclu.
 $36 \div 3 = 12$
- ④ Sur $]0 ; 4[$ les deux facteurs sont négatifs, donc le produit est positif ; sur $]4 ; 12[$ un seul l'est.
 $-4 \times -36 = 144$
 V croît puis décroît : maximum en $x = 4$.
- ⑤ c. On calcule le volume en 4.
 $4 \times 256 = 1024$
 $16^2 = 256$, donc 1 024 cm³ pour une découpe de 4 cm.

6 Convexité. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.

- ① a. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
 $3 \times 2 = 6$
puis $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.
- ② b. f'' est négative avant 1, positive après.
 $6 - 6 = 0$
 f est concave sur $] -\infty ; 1]$ et convexe sur $[1 ; +\infty[$.
- ③ c. f'' change de signe en 1 : c'est bien un point d'inflexion, et non une simple annulation.
 $1 - 3 + 2 = 0$
 $f(1) = 0$: le point d'inflexion est $(1 ; 0)$.

7 Vrai ou faux, en justifiant.

- ① a. Faux : il faut un **changement de signe**.
 $12 \times 0 = 0$
pour x^4 , $f'' = 12x^2$ s'annule en 0 en restant positive : la courbe reste convexe.
- ② b. Faux : convexité et variation sont deux choses distinctes.
 $0 - 0 = 0$
 e^{-x} est convexe et strictement décroissante — elle décroît de plus en plus lentement.
- ③ c. Faux : le facteur u' manque.
 $2 \div 1 = 2$
 $u = x^2$, $u' = 2x$, donc la dérivée vaut $\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
u et u' posés explicitement	3 pts	Une substitution directe, et le facteur u' perdu
Formule de composée exacte	4 pts	$\ln(5x)$ dérivé en $\frac{1}{5x}$

Variable nommée et intervalle donné	3 pts	Une optimisation menée sans domaine
Signe de la dérivée après factorisation	4 pts	Un signe cherché sur une somme
Bornes comparées, réponse dans le contexte	3 pts	Des dimensions données sans l'aire, ou sans unité
Convexité et inflexion établies par f''	3 pts	Une inflexion conclue d'une simple annulation