

COURS

Dérivation avancée — composées, optimisation et convexité

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Presque aucune fonction du programme de terminale n'est une dérivée usuelle telle quelle : elles sont **emboîtées**. e^{-x^2} , $\ln(3x+1)$, $\sqrt{x^2+1}$ — dans chacune, une fonction est glissée à l'intérieur d'une autre, et une seule règle permet de les dériver toutes. Ce chapitre en tire deux applications qui vont plus loin que le calcul : l'**optimisation**, qui cherche le meilleur choix possible, et la **convexité**, qui décrit non plus le sens de variation mais la façon dont il change.

1 Dériver une composée

RÈGLE

La dérivée d'une **composée** $u \circ v$ — c'est-à-dire de $x \mapsto u(v(x))$ — vaut $v'(x) \times u'(v(x))$: on dérive la fonction **extérieure** en laissant l'intérieur intact, puis on multiplie par la **dérivée de l'intérieur**. Toutes les formules du tableau ci-dessous n'en sont que des cas particuliers, et le facteur u' qu'elles portent toutes est exactement ce que la règle générale ajoute. Contrôle immédiat : en prenant $u = x$, donc $u' = 1$, chaque ligne redonne la dérivée usuelle correspondante.

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$$

toutes ces lignes disent la même chose : la dérivée de l'intérieur passe devant

fonction	dérivée	
e^u	$u' \times e^u$	le facteur u' est ce qu'on oublie
$\ln u$	u' / u	
u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$	contrôle : avec $u = x$, $u' = 1$ et l'on retrouve la dérivée usuelle
$\sqrt{u}$	$u' / (2\sqrt{u})$	
$\sin u \rightarrow u' \cos u \rightarrow \cos u \rightarrow -u' \sin u$		

règle générale : $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$ — on dérive l'extérieur, puis on multiplie par la dérivée de l'intérieur

Les composées usuelles : le facteur u' est ce qui les distingue des dérivées simples.

DÉRIVER UNE FONCTION EMBOÎTÉE

- 1 **Nommer l'intérieur** : poser $u = \dots$ explicitement, sur une ligne à part, et calculer u' avant toute autre chose.
- 2 **Reconnaître la forme extérieure** : est-ce e^u , $\ln u$, u^n , $\sqrt{u}$, $\sin u$? Une seule ligne du tableau s'applique.
- 3 **Écrire la formule** avant de remplacer. Substituer directement est ce qui fait perdre le facteur u' .
- 4 **Vérifier le domaine** : $\ln u$ exige $u > 0$, $\sqrt{u}$ exige $u \geq 0$ pour être dérivable — la dérivée n'existe pas partout où la fonction existe.
 $\sqrt{u}$ est définie quand $u \geq 0$ mais dérivable seulement quand $u > 0$: la nuance est régulièrement demandée.

EXEMPLE

Dériver $f(x) = e^{-x^2}$ puis $g(x) = \ln(3x + 1)$ sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

① Pour f : on pose $u = -x^2$, d'où $u' = -2x$.
 $0 - 2 = -2$

② La forme est e^u , de dérivée $u'e^u$.

$f'(x) = -2x e^{-x^2}$ — l'exponentielle étant toujours positive, f' a le signe de $-2x$.

③ Pour g : on pose $u = 3x + 1$, d'où $u' = 3$.
 $3 \times 1 = 3$

④ La forme est $\ln u$, de dérivée $\frac{u'}{u}$.

$$3 - 0 = 3$$

$g'(x) = \frac{3}{3x+1}$, positive sur l'intervalle : g y est croissante.

$$f'(x) = -2x e^{-x^2} \text{ et } g'(x) = \frac{3}{3x+1}.$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Dériver e^{3x} en e^{3x} , ou $\ln(5x)$ en $\frac{1}{5x}$. — le facteur u' manque dans les deux cas. Les réponses justes sont $3e^{3x}$ et $\frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$.
L'erreur ne produit aucune absurdité visible — le résultat a la bonne allure, il est seulement faux d'un facteur constant, et toutes les questions suivantes en héritent.

Le réflexe : écrire u et u' sur une ligne séparée **avant** d'appliquer la formule. Tant que ces deux lignes ne sont pas posées, ne rien dériver.

2 Optimisation

DÉFINITION

Un **maximum local** est une valeur que la fonction n'excède pas *au voisinage* d'un point ; un **maximum global** est une valeur qu'elle n'excède nulle part sur l'intervalle d'étude. Un extremum local ne peut se produire qu'en un point où f' **change de signe** — l'annulation seule ne suffit pas, comme le montre x^3 en 0. Sur un intervalle **fermé**, il faut en outre comparer aux valeurs des **bornes** : le maximum global peut être atteint en a ou en b , où f' ne s'annule pas.

RÉSOUTRE UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

- ① **Choisir la variable** et l'exprimer clairement : « soit x la largeur, en mètres ». Une variable non nommée rend tout le reste illisible.
- ② **Écrire la grandeur à optimiser en fonction de x** , et déterminer l'**intervalle** dans lequel x peut varier — les contraintes géométriques ou physiques le fixent.
- ③ **Dériver, factoriser, étudier le signe** de la dérivée sur cet intervalle.
- ④ **Dresser le tableau de variations** et lire l'extremum, sans oublier de comparer aux bornes si l'intervalle est fermé.
- ⑤ **Répondre à la question posée**, avec l'unité et la valeur optimisée.
la question demande souvent les dimensions et l'aire maximale : donner l'une sans l'autre coûte un point.

EXEMPLE

On dispose de 100 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur — le mur remplace un côté. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ?

① Soit x la largeur en mètres, comptée deux fois ; la longueur vaut alors $100 - 2x$, et x varie dans $]0 ; 50[$.
 $100 \div 2 = 50$

② L'aire s'écrit $A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.
 $2 \times 50 = 100$

③ On dérive : $A'(x) = 100 - 4x$, qui s'annule en 25 et change de signe.
 $100 \div 4 = 25$

④ A' est positive avant 25, négative après : A croît puis décroît, donc atteint son maximum en $x = 25$.
 $100 - 2 \times 25 = 50$

⑤ On calcule l'aire correspondante.
 $25 \times 50 = 1250$

l'enclos optimal mesure 25 m sur 50 m.

Aire maximale de 1 250 m², pour un enclos de 25 m sur 50 m.

3 Convexité

DÉFINITION

Une fonction deux fois dérivable est **convexe** sur un intervalle lorsque $f'' \geq 0$, et **concave** lorsque $f'' \leq 0$. La lecture géométrique est plus parlante que la définition : une fonction convexe a sa courbe **au-dessus de chacune de ses tangentes** et tourne sa creux vers le haut ; une fonction concave fait l'inverse. Ce n'est pas le sens de variation qui est décrit ici, mais la façon dont il change : une fonction peut décroître de façon convexe — de plus en plus lentement — ou concave — de plus en plus vite.

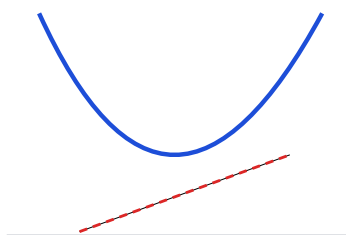
$$f'' \geq 0 \iff f \text{ convexe} \quad ; \quad f'' \leq 0 \iff f \text{ concave}$$

RÈGLE

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente, c'est-à-dire où la fonction passe de convexe à concave ou l'inverse. Il correspond à un **changement de signe de f''** — et non à sa simple annulation, exactement comme un extremum demande un changement de signe de f' . La fonction $x \mapsto x^4$ a une dérivée seconde nulle en 0 sans point d'inflexion : $12x^2$ reste positive de part et d'autre, et la courbe est convexe partout.

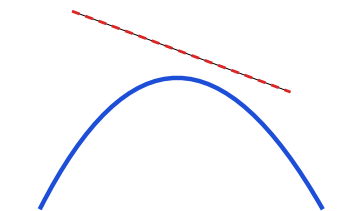
la convexité se lit sur la position de la tangente, et se démontre par f''

convexe



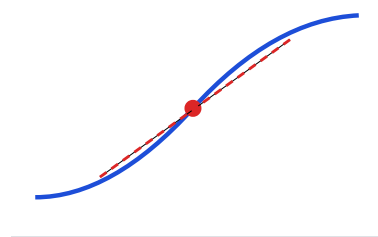
$f'' > 0$ · courbe au-dessus de ses tangentes

concave



$f'' < 0$ · courbe en dessous de ses tangentes

point d'inflexion



f'' change de signe · la tangente traverse la courbe

Convexe, concave, et le point où la tangente traverse la courbe.

La convexité n'est pas une curiosité d'analyse : c'est la forme mathématique de l'expression « la hausse ralentit ». Une épidémie dont les cas cumulés cessent d'être convexes pour devenir concaves a franchi son pic de contagion, alors même que le nombre total continue d'augmenter. Le **point d'inflexion** est ce moment de bascule — la croissance continue, mais elle a commencé à ralentir. C'est aussi pourquoi les copies confondent inflexion et maximum : l'un annule f'' , l'autre f' , et ils n'ont pas lieu au même endroit.

À VÉRIFIER

- Ai-je posé u et u' **avant** d'appliquer une formule de composée ?
- Le facteur u' figure-t-il bien dans ma dérivée ?
- Pour une optimisation : ai-je nommé la variable et donné son **intervalle** ?
- Ai-je comparé aux valeurs des **bornes** sur un intervalle fermé ?
- Convexité : ai-je bien utilisé f'' , et non f' ?
- Pour une inflexion : ai-je vérifié le **changement de signe de f''** ?

À RETENIR

- $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$ — dériver l'extérieur, multiplier par l'intérieur.
- $(e^u)' = u'e^u$ · $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ · $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ — définie si $u \geq 0$, dérivable si $u > 0$.
- Le facteur u' est ce qu'on oublie : poser u et u' avant tout.
- Extremum : f' doit **changer de signe** — et comparer aux bornes si l'intervalle est fermé.
- $f'' \geq 0 \iff$ convexe, courbe au-dessus de ses tangentes.
- Point d'inflexion : f'' **change de signe**, pas seulement s'annule.