CORRIGÉ

Droites et plans — Vecteurs et représentations paramétriques

Tle

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 $ABCDEFGH$ est un cube et K le centre de la face $EFGH$. Exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$:

1. a. Chemin par B et C : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
2. b. $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
3. c. $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
4. d. K est le milieu de la diagonale $[EG]$, et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.
5. e. On va de A en D, puis on avance de la moitié de $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire de $\overrightarrow{DC}$: N est le milieu de l'arête $[DC]$.

2 Vrai ou faux ? Justifier. Les quatre premières affirmations portent sur le cube de l'exercice 1.

1. a. **Vrai.** $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$: les vecteurs directeurs sont colinéaires (et même égaux).
2. b. **Faux.** Un plan contenant les deux droites contiendrait A, B, C : ce serait (ABC), qui ne contient pas E. Elles sont non coplanaires, donc pas sécantes.
3. c. **Vrai.** $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AC}$ est dans la direction du plan (ABC).
4. d. **Vrai.** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires ; si l'on avait $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$, G serait dans le plan (ABD), ce qui est faux. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
5. e. **Faux.** Contre-exemple : (AE) et (BC), ni parallèles ni sécantes.

3 Dans un repère de l'espace, on donne $A(1\,;2\,;-1)$, $B(3\,;1\,;0)$, $C(-3\,;4\,;-3)$ et $D(0\,;1\,;2)$.

1. a. $\overrightarrow{AB}(2\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-4\,;2\,;-2)$. Avec $k=-2$:
   $-2\times 2 = -4$
   et $-2\times(-1)=2$, $-2\times 1=-2$: $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$, vecteurs colinéaires, donc A, B, C alignés.
2. b. $\overrightarrow{AD}(-1\,;-1\,;3)$. D'après x, il faudrait $k=-\frac{1}{2}$; mais $-\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{1}{2}\neq -1$. Pas colinéaires : A, B, D ne sont pas alignés.
3. c. $ABDE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, donc les coordonnées de E sont celles de D diminuées de celles de $\overrightarrow{AB}$:
   $0-2=-2$
   $1-(-1)=2$ et $2-1=1$: $E(-2\,;2\,;1)$.
4. Contrôle : le milieu de $[AD]$ a pour abscisse $\frac{1+0}{2}=0{,}5$, celui de $[BE]$ aussi ; de même pour les autres coordonnées, $(0{,}5\,;1{,}5\,;0{,}5)$ dans les deux cas.
   $\frac{3+(-2)}{2}=0{,}5$
5. Conclusion : A, B, C alignés ; A, B, D non alignés ; $E(-2\,;2\,;1)$.

4 **Dans un repère, on donne $\vec{u}(1\,;1\,;0)$, $\vec{v}(0\,;1\,;1)$, $\vec{w}(1\,;0\,;1)$ et $\vec{t}(3\,;1\,;2)$.**

1. a. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $\vec{v} = k\vec{u}$ donnerait $1 = k \times 0$ sur z, et $\vec{u} = k\vec{v}$ donnerait $1 = k \times 0$ sur x. $a\vec{u} + b\vec{v}$ a pour coordonnées $(a\,;a+b\,;b)$.
2. $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$ imposerait $a = 1$, $b = 1$ et $a + b = 0$; or $1 + 1 = 2 \neq 0$. $\vec{w}$ n'est pas combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, c'est une base.
3. b. On cherche x, y, z tels que $\vec{t} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$: $x + z = 3$, $x + y = 1$, $y + z = 2$. En ajoutant : $2(x + y + z) = 6$, donc $x + y + z = 3$.
   $\frac{3+1+2}{2} = 3$
4. Puis $z = 3 - 1 = 2$, $x = 3 - 2 = 1$, $y = 3 - 3 = 0$. Contrôle : $\vec{u} + 2\vec{w}$ a pour coordonnées $(1 + 2\,;1 + 0\,;0 + 2)$.
   $1 + 2 \times 1 = 3$
5. c. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(1\,;2\,;1)$: $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$, les trois vecteurs sont coplanaires.
6. Conclusion : $\vec{t}$ a pour coordonnées $(1\,;0\,;2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ ne forment pas une base.

---

5 **Dans un repère orthonormé, la droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $x = 2 - 3t$, $y = 1 + t$, $z = 4$, $t \in \mathbb{R}$.**

1. a. Avec $t = 0$: le point $(2\,;1\,;4)$; les coefficients de t donnent le vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;1\,;0)$.
2. b. $2 - 3t = -4$ donne $t = 2$; alors $y = 1 + 2 = 3$ et $z = 4$: A appartient à $\mathcal{D}$, pour $t = 2$.
   $2 - 3 \times 2 = -4$
3. c. $\vec{u}\,'(6\,;-2\,;0) = -2\vec{u}$: les droites sont parallèles. Le point $(-1\,;2\,;4)$ de $\mathcal{D}'$ est sur $\mathcal{D}$, pour $t = 1$: $2 - 3 = -1$, $1 + 1 = 2$, $z = 4$. Elles sont confondues.
   $2 - 3 \times 1 = -1$
4. d. $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j}$ est dans la direction du plan : $\mathcal{D}$ lui est parallèle. Ses points ont pour cote 4, jamais 0 : elle n'a aucun point commun avec lui.
5. e. La liste des points de paramètres 0, 1 et 2 : `[[2, 1, 4], [-1, 2, 4], [-4, 3, 4]]`, soit trois points de $\mathcal{D}$; on y retrouve A pour $t = 2$.
   $2 - 3 \times 2 = -4$
6. Conclusion : $\mathcal{D}$ passe par $(2\,;1\,;4)$, est dirigée par $\vec{u}(-3\,;1\,;0)$, contient A, coïncide avec $\mathcal{D}'$ et est strictement parallèle au plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

---

6 **Deux drones. Dans un repère orthonormé d'unité le mètre, le sol est l'ensemble des points de cote nulle. À l'instant t, en secondes ($t \geqslant 0$), le drone 1 est au point $M(2 + 3t\,;-1 + 4t\,;30 - 2t)$ et le drone 2 au point $N(26 - 2t\,;9 + t\,;28 - t)$. Chacun se déplace en ligne droite.**

1. a. À $t = 0$: drone 1 en $(2\,;-1\,;30)$, drone 2 en $(26\,;9\,;28)$. Vecteurs directeurs : $\vec{u}(3\,;4\,;-2)$ et $\vec{v}(-2\,;1\,;-1)$.
2. b. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : $k = -\frac{3}{2}$ d'après x, mais $-\frac{3}{2} \times 1 \neq 4$. On note s le paramètre du drone 2 et l'on résout $2 + 3t = 26 - 2s$, $-1 + 4t = 9 + s$, $30 - 2t = 28 - s$.
3. La troisième équation donne $s = 2t - 2$; dans la deuxième, $-1 + 4t = 7 + 2t$, d'où $t = 4$ et $s = 6$. La première est vérifiée :
   $2 + 3 \times 4 = 26 - 2 \times 6 = 14$
4. Les trajectoires sont sécantes en P, obtenu avec $t = 4$:
   $-1 + 4 \times 4 = 15$
   $P(14\,;15\,;22)$, car $30 - 2 \times 4 = 22$.
5. c. Le paramètre est ici le temps : le drone 1 passe en P à l'instant 4 s, le drone 2 à l'instant 6 s. Ils n'y sont jamais ensemble : pas de collision en P, et nulle part ailleurs, puisque P est le seul point commun aux deux trajectoires.
6. d. $30 - 2t = 0$ donne $t = 15$; alors $x = 2 + 45 = 47$ et $y = -1 + 60 = 59$.
   $2 + 3 \times 15 = 47$
7. Conclusion : les trajectoires se croisent en $P(14\,;15\,;22)$, à 2 s d'écart, sans collision ; le drone 1 toucherait le sol au bout de 15 s, au point $(47\,;59\,;0)$.

---

7 **Dans un repère orthonormé, $\mathcal{D}$: $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Étudier la position relative de $\mathcal{D}$ et de chacune des droites suivantes, de paramètre s réel.**

1. a. $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}(1\,;2\,;1)$, et $\vec{u_1}(-2\,;-4\,;-2) = -2\vec{u}$: parallèles. Le point $(3\,;1\,;2)$ de $\mathcal{D}_1$ donnerait $t = 2$, puis $y = 4 \neq 1$: il n'est pas sur $\mathcal{D}$, les droites sont strictement parallèles.
   $2 \times 2 = 4$
2. b. $\vec{u_2}(1\,;-1\,;3)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ ($k = 1$ d'après x, mais $-1 \neq 2$). Système : $1 + t = 2 + s$, $2t = 1 - s$, $-1 + t = 3s$.
3. La première donne $t = 1 + s$; dans la deuxième, $2 + 2s = 1 - s$, d'où $s = -\frac{1}{3}$ et $t = \frac{2}{3}$.
   $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
4. Troisième : $-1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, mais $3s = -1$. Pas de solution : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires.
   $-1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$
5. c. $\vec{u_3}(0\,;1\,;-1)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. Système : $1 + t = 2$, $2t = 3 + s$, $-1 + t = -1 - s$; d'où $t = 1$, puis $s = 2 - 3 = -1$.
   $2 \times 1 - 3 = -1$
6. Troisième : $-1 + 1 = 0$ et $-1 - (-1) = 0$, vérifiée. Point commun, avec $t = 1$: $(2\,;2\,;0)$.
   $-1 + 1 = -1 - (-1) = 0$

---

8 **$ABCD$ est un tétraèdre ; I, J, K sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$. On admet que le centre de gravité G du triangle BCD vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.**

1. a. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ par Chasles ; de même, $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
2. b. $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires (B, C, D ne sont pas alignés), donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ non plus : ils dirigent (IJK).
3. Ces deux vecteurs non colinéaires sont dans la direction de (BCD) : les plans sont parallèles. Ils sont même strictement parallèles, car $I \notin (BCD)$, sinon A serait dans ce plan.
4. c. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$, donc $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.
   $\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$
5. Par ailleurs $\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$: c'est le même vecteur.
6. Conclusion : $\overrightarrow{IM}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, donc M appartient au plan (IJK) : ce plan coupe $[AG]$ en son milieu.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Exprimer un vecteur comme combinaison linéaire sur une figure	3 pts	Chasles appliqué à des vecteurs qui ne s'enchaînent pas ; un vecteur remplacé par un vecteur de même longueur mais d'une autre direction
Alignement, colinéarité, parallélisme	3 pts	Proportionnalité vérifiée sur deux coordonnées seulement ; conclusion sans citer la propriété
Coplanarité, base, coordonnées dans une base	4 pts	La troisième équation non testée ; « deux à deux non colinéaires, donc une base »
Représentation paramétrique : l'écrire, la lire, tester un point	4 pts	Point et vecteur directeur confondus ; un t tiré d'une équation sans être vérifié dans les deux autres
Position relative de deux droites, point d'intersection	4 pts	Le même paramètre pour les deux droites ; « non parallèles, donc sécantes » ; le point commun non calculé
Interpréter dans le contexte	2 pts	Confondre trajectoires qui se coupent et collision ; un résultat sans unité