COURS

Droites et plans — Vecteurs et représentations paramétriques

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Dans l'espace, deux droites peuvent ne jamais se rencontrer sans être parallèles : le dessin trompe, le calcul tranche. **Une droite, c'est un point et un vecteur directeur ; un plan, un point et deux vecteurs non colinéaires ; l'espace tout entier, un point et trois vecteurs non coplanaires.** Alignement, parallélisme et coplanarité se ramènent ainsi à des combinaisons linéaires de vecteurs, et, dans un repère, à des systèmes d'équations.

1 Vecteurs de l'espace et combinaisons linéaires

DÉFINITION

Comme dans le plan, la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme tout point M en M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme, éventuellement aplati, et la **relation de Chasles** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ reste vraie. Une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est un vecteur $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, avec a, b, c réels ; on la **représente** en plaçant les vecteurs bout à bout. Deux vecteurs sont **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un réel : $\vec{v} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{v}$; le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

EXPRIMER UN VECTEUR À L'AIDE D'UNE FIGURE

1. **Choisir un chemin** de l'origine à l'extrémité, le long des arêtes, et l'écrire avec la relation de Chasles.
2. **Remplacer chaque vecteur** par un vecteur **égal** parmi ceux de référence : les faces du cube sont des carrés, donc $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$.
3. **Traduire les milieux** : si I est le milieu de $[GH]$, $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$.

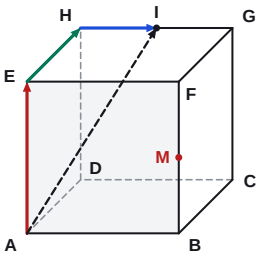
   contrôler avec un second chemin : le résultat doit être le même.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, I est le milieu de $[GH]$. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, puis placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HI}$, avec $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
2. Pour M : de A on va en B, puis on avance de la moitié de $\overrightarrow{AE}$, c'est-à-dire de $\overrightarrow{BF}$.

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$; **M est le milieu de $[BF]$.**



Le chemin de A à I : rouge, vert, bleu. Le segment $[AI]$ traverse le cube, d'où les pointillés, comme les arêtes cachées.

PIÈGE

Écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, ou $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}$ « parce que les arêtes ont la même longueur ». — Chasles exige que chaque vecteur parte de l'extrémité du précédent ; deux vecteurs égaux ont même direction, même sens et même longueur : $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$.

Ce que ça coûte : l'expression du vecteur, et toutes les questions qui s'appuient dessus.

Le réflexe : vérifier sur la figure que les deux flèches sont parallèles et de même sens.

2 Droites et plans de l'espace

DÉFINITION

Soit A un point. La **droite** passant par A de **vecteur directeur** $\vec{u}$ non nul est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, t réel ; tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ la dirige aussi. Le **plan** passant par A dirigé par deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$, s et t réels ; les vecteurs $s\vec{u} + t\vec{v}$ forment sa **direction**. Trois points non alignés A, B, C définissent le plan (ABC), dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

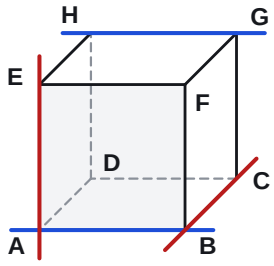
PROPRIÉTÉ

Conséquences. A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ; deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Trois vecteurs sont **coplanaires** si l'un est combinaison linéaire des deux autres ; si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, cela revient à $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (admis). A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ le sont.

PROPRIÉTÉ

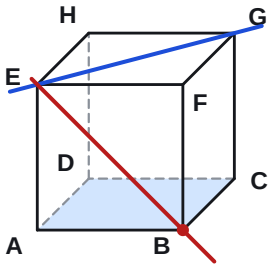
Positions relatives (admises). Deux droites sont coplanaires — sécantes, ou parallèles (strictement ou confondues) — ou **non coplanaires** : ni sécantes, ni parallèles. **Une droite et un plan** sont sécants en un point, ou parallèles (droite incluse, ou sans point commun). **Deux plans** sont sécants selon une droite, ou parallèles (strictement ou confondus). **Critères** : une droite est parallèle à un plan si et seulement si son vecteur directeur est dans la direction du plan ; deux plans sont parallèles si et seulement si deux vecteurs non colinéaires de l'un sont dans la direction de l'autre.

deux droites



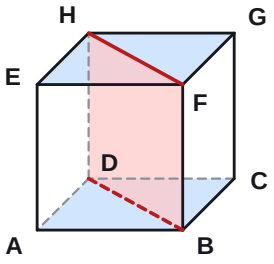
(AB) et (HG) : parallèles
(AE) et (BC) : non coplanaires

une droite et un plan



(EG) parallèle au plan (ABC)
(EB) coupe le plan (ABC) en B

deux plans



(ABC) et (EFG) : parallèles
(BDH) les coupe selon (BD) et (FH)

Le cube fournit tous les cas. Deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas forcément parallèles : (AE) et (BC) ne sont dans aucun plan commun.

DÉMONTRER UN ALIGNEMENT, UN PARALLÉLISME, UNE COPLANARITÉ

1. **Traduire en vecteurs** : alignement : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ; droite parallèle à un plan : vecteur directeur dans sa direction ; coplanarité : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
2. **Tout exprimer** avec les mêmes vecteurs de référence, par la relation de Chasles.
3. **Exhiber les réels** k, ou a et b, puis conclure en citant la propriété.

EXEMPLE

Dans le cube $ABCDEFGH$, K est le milieu de $[BF]$ et L celui de $[DH]$. Montrer que A, K, G, L sont coplanaires, puis que (AH) est parallèle au plan (BCG).

1. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$, donc $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.
2. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$, combinaison de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$, qui dirigent (BCG).

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AL}$: **A, K, G, L sont coplanaires ($AKGL$ est un parallélogramme) ; (AH) est parallèle à (BCG).**

PIÈGE

« Ces deux droites ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. » — vrai dans un plan, faux dans l'espace : (AE) et (BC), non coplanaires, ne sont ni parallèles ni sécantes.

Ce que ça coûte : la conclusion, et le point d'intersection annoncé, qui n'existe pas.

Le réflexe : avant de chercher un point d'intersection, résoudre le système, ou montrer que les droites sont dans un même plan.

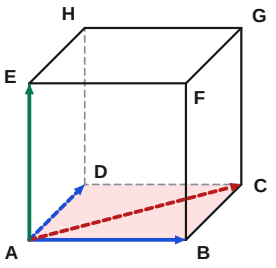
3 Bases et repères de l'espace

DÉFINITION

Trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ **non coplanaires** forment une **base**. Tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit de façon **unique** $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (admis) : $(x\,;y\,;z)$ sont ses **coordonnées**. Avec un point O, $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un **repère**, et les coordonnées de M sont celles de $\overrightarrow{OM}$. Deux vecteurs non colinéaires d'un plan forment une base de sa direction.

PROPRIÉTÉ

En coordonnées, dans tout repère : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A)$, milieu de $[AB]$ par les moyennes, $a\vec{u} + b\vec{v}$ coordonnée par coordonnée. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles** : $\vec{v} = k\vec{u}$ se vérifie sur les **trois** coordonnées.



Bleu et rouge : trois vecteurs de la face $ABCD$, deux à deux non colinéaires mais coplanaires, donc pas une base. Avec le vert, qui sort de la face, les deux bleus forment une base.

Une image à garder. Un vecteur non nul engendre une direction de droite, deux vecteurs non colinéaires une direction de plan, trois non coplanaires tout l'espace ; si une droite coupe un plan, un vecteur directeur de la droite et deux vecteurs non colinéaires du plan forment une base. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ du cube, l'exemple de la partie 1 se lit $I(0{,}5\,;1\,;1)$.

DÉCIDER SI TROIS VECTEURS FORMENT UNE BASE

1. **Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.**
2. **Chercher a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$** : trois équations, deux inconnues.
3. **Résoudre avec deux équations, tester la troisième** : vérifiée, les vecteurs sont coplanaires, pas de base ; sinon, c'est une base.
   même démarche pour les coordonnées d'un vecteur dans une base : trois équations, trois inconnues.

EXEMPLE

$\vec{u}(1\,;0\,;2)$, $\vec{v}(0\,;1\,;-1)$, $\vec{w}(2\,;3\,;1)$ forment-ils une base ? Et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}\,'(2\,;3\,;0)$?

1. $\vec{v} = k\vec{u}$ donnerait $1 = k \times 0$ sur y, et $\vec{u} = k\vec{v}$, $1 = k \times 0$ sur x : non colinéaires. $a\vec{u} + b\vec{v}$ a pour coordonnées $(a\,;b\,;2a - b)$.
2. Égaler à $\vec{w}$: $a = 2$, $b = 3$, et $2a - b = 4 - 3 = 1$, comme pour $\vec{w}$: $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$. Pour $\vec{w}\,'$, il faudrait $2a - b = 0$: impossible.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : pas une base. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}\,'$ forment une base.

PIÈGE

Déclarer $\vec{u}(1\,;2\,;3)$ et $\vec{v}(2\,;4\,;5)$ colinéaires sur leurs deux premières coordonnées, ou trois vecteurs deux à deux non colinéaires « donc une base ». — $2 \times 3 \neq 5$. Et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ sont deux à deux non colinéaires, mais $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Ce que ça coûte : toute la question, puisque la conclusion est fausse.

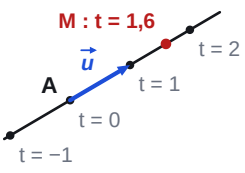
Le réflexe : vérifier k sur les trois coordonnées ; tester si le troisième vecteur est combinaison des deux autres.

4 Représentation paramétrique d'une droite

PROPRIÉTÉ

Représentation paramétrique (démontrée). Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ dirigée par $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ non nul. $M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, soit le système ci-dessous : **une** représentation paramétrique de $\mathcal{D}$. Chaque réel t donne un point, chaque point un seul t. Réciproquement, un tel système, avec $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$, représente cette droite.

$$\begin{cases} x = x_A + t\,a, \\ y = y_A + t\,b, \\ z = z_A + t\,c, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$



Le paramètre t gradue la droite : $t = 0$ donne A, $t = 1$ l'extrémité du vecteur directeur.

ÉCRIRE UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE ET TESTER UN POINT

1. **Choisir un point et un vecteur directeur** : pour (AB), le point A et $\overrightarrow{AB}$. **Écrire le système**, avec $t \in \mathbb{R}$.
2. **Tester un point** : tirer t d'une équation, puis vérifier les deux autres avec ce même t.
   une droite a une infinité de représentations : un autre point, un autre vecteur directeur colinéaire.

EXEMPLE

$A(1\,;-2\,;3)$, $B(3\,;0\,;2)$. Représenter (AB) ; $C(7\,;4\,;0)$ et $E(5\,;2\,;2)$ sont-ils sur (AB) ?

1. $\overrightarrow{AB}(2\,;2\,;-1)$: (AB) a pour représentation $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 2t$, $z = 3 - t$, $t \in \mathbb{R}$.
2. C : $1 + 2t = 7$ donne $t = 3$, puis $y = -2 + 6 = 4$ et $z = 3 - 3 = 0$: vérifié. E : $1 + 2t = 5$ donne $t = 2$, $y = 2$ convient, mais $z = 3 - 2 = 1 \neq 2$.

$C \in (AB)$, pour $t = 3$; $E \notin (AB)$.

POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES DONNÉES PAR DES REPRÉSENTATIONS

1. **Comparer les vecteurs directeurs.** Colinéaires : les droites sont parallèles ; un point de l'une sur l'autre les rend confondues, sinon elles sont strictement parallèles.
2. **Sinon, égaler les coordonnées avec deux paramètres distincts**, t et s : trois équations, deux inconnues.
3. **Résoudre avec deux équations, tester la troisième.** Vérifiée : sécantes, et l'on calcule le point ; sinon : non coplanaires.

EXEMPLE

Position relative de (AB) ci-dessus et de $\mathcal{D}'$: $x = 4 + s$, $y = -1 - s$, $z = 4 + 2s$, $s \in \mathbb{R}$.

1. $\vec{u}(2\,;2\,;-1)$, $\vec{u}\,'(1\,;-1\,;2)$: $k = 2$ d'après x, mais $2 \times (-1) \neq 2$; non colinéaires.
2. $1 + 2t = 4 + s$ et $-2 + 2t = -1 - s$: leur somme donne $4t - 1 = 3$, d'où $t = 1$ et $s = 1 + 2 - 4 = -1$.
   $1 + 2 - 4 = -1$
3. Troisième équation, $3 - t = 4 + 2s$, vérifiée ; le point s'obtient avec $t = 1$:
   $3 - 1 = 4 + 2 \times (-1) = 2$

(AB) et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en $(3\,;0\,;2)$, c'est-à-dire en B.

PIÈGE

Appeler t le paramètre des deux droites ; ou conclure « sécantes » après deux équations sur trois. — le point commun, s'il existe, est presque toujours atteint pour deux valeurs différentes des paramètres ; et deux équations à deux inconnues ont presque toujours une solution : c'est la troisième qui tranche.

Ce que ça coûte : toute la question : position relative fausse, point d'intersection faux ou inexistant.

Le réflexe : nommer s le paramètre de la seconde droite, puis reporter t et s dans la troisième équation.

Et ensuite. Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace, équation cartésienne d'un plan, intersection d'une droite et d'un plan, projeté orthogonal : voir la fiche « Géométrie dans l'espace — produit scalaire, plans et distances ».

À VÉRIFIER

- Exprimer un vecteur sur une figure par Chasles, avec des vecteurs **égaux**, pas seulement de même longueur.
- Traduire alignement, parallélisme, coplanarité par une colinéarité ou une combinaison linéaire.
- Vérifier une colinéarité sur les **trois** coordonnées.
- Décider si trois vecteurs forment une base ; trouver les coordonnées d'un vecteur dans une base.
- Écrire une représentation paramétrique, y lire un point et un vecteur directeur, tester un point.
- Classer deux droites : vecteurs directeurs, puis système en t et s, troisième équation testée.

À RETENIR

- Droite : un point et un vecteur directeur non nul ; plan : un point et deux vecteurs non colinéaires ; base : trois vecteurs non coplanaires.
- Alignement et parallélisme de droites : colinéarité, vérifiée sur les **trois** coordonnées. Coplanarité : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Dans l'espace, deux droites non parallèles peuvent être **non coplanaires** : ni parallèles, ni sécantes.
- Représentation paramétrique : $x = x_A + ta$, $y = y_A + tb$, $z = z_A + tc$, $t \in \mathbb{R}$; les coefficients de t forment un vecteur directeur.
- Deux droites, deux paramètres t et s ; deux équations donnent t et s, la troisième décide.