CORRIGÉ

Équations y′ = ay + b — Primitives et équations différentielles

Tle

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

1. a. $4x^3$, $-6x$ et 5 ont pour primitives x^4, $-3x^2$ et $5x$: $x \mapsto x^4 - 3x^2 + 5x$ convient.
   $6 \div 2 = 3$
2. b. $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ a pour primitive $\dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x}$, et $\dfrac{1}{x}$ a pour primitive $\ln x$: $G(x) = -\dfrac{3}{x} + 2\ln x$.
3. c. $\left(2\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\sin' = \cos$: $H(x) = 2\sqrt{x} + 2\sin x$.
4. d. $F(x) = x^4 - 3x^2 + 5x + C$, et en 1 :
   $1 - 3 + 5 = 3$
   donc $3 + C = 0$, soit $C = -3$.
5. Conclusion : $F(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 3$; chaque résultat se contrôle en dérivant.

2 Vrai ou faux ? Justifier.

1. a. **Vrai.** $F'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$.
2. b. **Faux.** Sa dérivée e^x diffère de $\mathrm{e}^x + 2$ pour tout x.
3. c. **Faux.** $(f+g)' = 2(f+g) + 2$. Contre-exemple : $f = g = -\dfrac{1}{2}$, solution constante ; $f + g = -1$ a une dérivée nulle, mais
   $2 \times (-1) + 1 = -1$
4. d. **Faux.** Les solutions sont les $C\,\mathrm{e}^{-x}$; pour $C = -1$, la dérivée e^{-x} est strictement positive : $-\mathrm{e}^{-x}$ est croissante.

3 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction, en reconnaissant une forme $(v' \circ u) \times u'$.

1. a. $u(x) = x^2 + 1$, $u'(x) = 2x$: $f = \dfrac{1}{2}u'u^3$, d'où $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(x^2+1)^4}{4} = \dfrac{(x^2+1)^4}{8}$.
   $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
2. b. $u(x) = x^2 + 4 > 0$, $u'(x) = 2x$: $g = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{u'}{u}$, d'où $G(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2+4)$.
3. c. $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$, $u' = \mathrm{e}^x$: $h = u'u^{-2}$, de primitive $\dfrac{u^{-1}}{-1}$, d'où $H(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
4. d. $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$: $k = -u'\,\mathrm{e}^u$, d'où $K(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. Contrôle, pour c : $H'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = h(x)$; les autres se vérifient de même.

4 **Résoudre chaque équation différentielle, puis déterminer la solution qui vérifie la condition donnée.**

1. a. $y(x) = C\,\mathrm{e}^{0,5x}$ et $y(0) = C = -3$: $y(x) = -3\,\mathrm{e}^{0,5x}$.
2. b. $y' = -4y + 8$: solution constante
   $k = -\frac{8}{-4} = 2$
3. $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$, et $y(0) = C + 2 = 0$ donne $C = -2$: $y(x) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-4x}$.
4. c. $y' = \dfrac{1}{3}y + 2$: solution constante
   $k = -2 \div \frac{1}{3} = -6$
5. $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\frac{x}{3}} - 6$, et $y(3) = C\,\mathrm{e} - 6 = 0$ donne $C = \dfrac{6}{\mathrm{e}}$: $y(x) = 6\,\mathrm{e}^{\frac{x}{3}-1} - 6$. Contrôle : $y(3) = 6\,\mathrm{e}^{0} - 6$ et $6 \times 1 - 6 = 0$
6. Conclusion : a. $y = -3\,\mathrm{e}^{0,5x}$; b. $y = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-4x}$; c. $y = 6\,\mathrm{e}^{\frac{x}{3}-1} - 6$.

---

5 **On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}5y + 1$.**

1. a. Solution constante 2, car $-0{,}5 \times 2 + 1 = 0$: solutions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-0,5x} + 2$. Avec $C = -2$, 0 et 2 : $f_1(x) = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-0,5x}$, $f_2(x) = 2$, $f_3(x) = 2 + 2\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
   $-0{,}5 \times 2 + 1 = 0$
2. b. $f_1'(x) = \mathrm{e}^{-0,5x} > 0$: f_1 croissante ; f_2 constante ; $f_3'(x) = -\mathrm{e}^{-0,5x} < 0$: f_3 décroissante. $\mathrm{e}^{-0,5x}$ tend vers 0 : les trois tendent vers 2.
3. c. Avec $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}367879$:
   $2 - 2 \times 0{,}367879 \approx 1{,}26$
   et $f_3(2) \approx 2{,}74$: les courbes de f_1 et f_3 sont symétriques par rapport à la droite $y = 2$.
4. d. Si deux solutions prennent la même valeur y_0 en x_0, l'égalité $C\,\mathrm{e}^{-0,5x_0} + 2 = y_0$ ne laisse qu'une valeur de C : elles sont égales. Deux courbes distinctes n'ont donc aucun point commun.

---

6 **On considère $(E) : y' = -y + 2x + 1$ et la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2x - 1$.**

1. a. $p'(x) = 2$ et $-p(x) + 2x + 1 = -2x + 1 + 2x + 1 = 2$: p est solution.
   $1 + 1 = 2$
2. b. (E) s'écrit $y' + y = 2x + 1$, et $p' + p = 2x + 1$ d'après a. Donc $(y - p)' + (y - p) = (y' + y) - (2x + 1)$: $(y - p)' = -(y - p)$ si et seulement si y est solution de (E).
3. c. $y - p = C\,\mathrm{e}^{-x}$: les solutions sont les $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$. $g(0) = C - 1 = 0$ donne $C = 1$.
4. $g(1) = \mathrm{e}^{-1} + 1$, avec $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}367879$:
   $0{,}367879 + 1 \approx 1{,}37$
5. Conclusion : $g(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$ et $g(1) \approx 1{,}37$.

---

7 **Refroidissement. Un plat sort du four à 180 °C dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$, en °C, t minutes après, vérifie $\theta' = -0{,}04\,\theta + 0{,}8$ et $\theta(0) = 180$.**

1. a. $0 = -0{,}04k + 0{,}8$:
   $k = 0{,}8 \div 0{,}04 = 20$
   c'est la température de la pièce : un plat à 20 °C y reste à 20 °C.
2. b. $\theta(t) = C\,\mathrm{e}^{-0,04t} + 20$ et $\theta(0) = C + 20 = 180$: $C = 160$. Avec $\mathrm{e}^{-0,4} \approx 0{,}670320$:
   $160 \times 0{,}670320 + 20 \approx 127{,}25$
   $\theta(t) = 160\,\mathrm{e}^{-0,04t} + 20$, et $\theta(10) \approx 127$ °C.
3. c. $\theta'(t) = -6{,}4\,\mathrm{e}^{-0,04t} < 0$: θ décroît.
   $160 \times (-0{,}04) = -6{,}4$
4. $\mathrm{e}^{-0,04t}$ tend vers 0 en $+\infty$: $\theta(t)$ tend vers 20 ; le plat se rapproche de la température de la pièce.
5. d. $160\,\mathrm{e}^{-0,04t} + 20 = 50 \iff \mathrm{e}^{-0,04t} = \dfrac{3}{16} \iff t = -25\ln\dfrac{3}{16} = 25\ln\dfrac{16}{3}$.
   $\frac{30}{160} = \frac{3}{16}$
6. Avec $\ln\dfrac{16}{3} \approx 1{,}673976$:
   $25 \times 1{,}673976 \approx 41{,}85$
7. Conclusion : le plat est à 50 °C au bout d'environ 41,8 minutes.

---

8 **Méthode d'Euler. On considère $(E) : y' = 0{,}5y + 1$ avec $y(0) = 0$, et la méthode d'Euler de pas $h = 0{,}2$ définie par $x_k = 0{,}2k$, $y_0 = 0$ et $y_{k+1} = y_k + h\,(0{,}5\,y_k + 1)$.**

1. a. $y_{k+1} = y_k + 0{,}1\,y_k + 0{,}2 = 1{,}1\,y_k + 0{,}2$; $y_1 = 0{,}2$, $y_2 = 0{,}42$ et $1{,}1 \times 0{,}42 + 0{,}2 = 0{,}662$
2. b. $v_{k+1} = 1{,}1\,y_k + 2{,}2 = 1{,}1\,(y_k + 2) = 1{,}1\,v_k$: géométrique de raison 1,1, avec $v_0 = 2$.
   $0{,}2 + 2 = 1{,}1 \times 2$
   donc $y_k = 2 \times 1{,}1^k - 2$.
3. c. Solution constante $-\dfrac{1}{0{,}5} = -2$: $y(x) = C\,\mathrm{e}^{0{,}5x} - 2$, et $y(0) = 0$ donne $y(x) = 2\,\mathrm{e}^{0{,}5x} - 2$.
   $-\frac{1}{0{,}5} = -2$
4. $x = 1$ correspond à $k = 5$:
   $2 \times 1{,}1^5 - 2 \approx 1{,}221$
5. Valeur exacte, avec $\mathrm{e}^{0{,}5} \approx 1{,}648721$:
   $2 \times 1{,}648721 - 2 \approx 1{,}297$
6. d. $y''(x) = 0{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}5x} > 0$: la solution est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes ; chaque pas d'Euler suit une tangente et passe en dessous.
7. Conclusion : $y_5 \approx 1{,}221 < y(1) \approx 1{,}297$, valeur approchée par défaut, meilleure si h diminue.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Calculer une primitive, et celle qui vérifie une condition	5 pts	Un facteur u' oublié ou mal compensé ; la constante C oubliée ; aucune vérification par dérivation
Résoudre $y' = ay$ ou $y' = ay + b$	5 pts	L'équation non mise sous la forme $y' = ay + b$ (signe de a) ; $\dfrac{b}{a}$ au lieu de $-\dfrac{b}{a}$; $\mathrm{e}^{ax} + C$ au lieu de $C\,\mathrm{e}^{ax}$
Utiliser une condition initiale	3 pts	C calculée sans la solution constante ou particulière
Résoudre $y' = ay + f$ avec une solution particulière donnée	3 pts	Ne pas vérifier que p est solution ; oublier d'ajouter p
Méthode d'Euler et modélisation	4 pts	Une relation de récurrence fausse ; un résultat sans unité ou sans interprétation dans le contexte