COURS

Équations y′ = ay + b — Primitives et équations différentielles

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Ici, l'inconnue d'une équation n'est plus un nombre mais une **fonction**, reliée à sa propre dérivée. Chercher une primitive de f, c'est résoudre $y' = f$; une grandeur dont la vitesse de variation est proportionnelle à sa valeur vérifie $y' = ay$. **Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$; celles de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) s'obtiennent en leur ajoutant la solution constante $-\dfrac{b}{a}$; une condition initiale fixe C.**

1 Équation différentielle et primitives

DÉFINITION

Une **équation différentielle** relie une fonction inconnue y, dérivable sur un intervalle I, à sa dérivée y'. Une **solution** sur I est une fonction g dérivable sur I qui rend l'égalité vraie pour **tout** x de I ; **résoudre**, c'est trouver **toutes** les solutions. Ainsi $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ est une solution de $y' = 2y$, car $g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} = 2g(x)$; ce n'est pas la seule.

DÉFINITION

Soit f continue sur un intervalle I. Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$: une solution de $y' = f$. On l'obtient en lisant le tableau des dérivées **à l'envers**. **Admis** (démontré dans la fiche « Intégration ») : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Pour certaines, comme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, on ne dispose d'aucune primitive explicite.

RÈGLE

Primitives de référence et formes composées. Chaque ligne du tableau ci-dessous se vérifie en dérivant. Pour $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$, une primitive est $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$; pour $n = -1$, c'est $\ln$. **Linéarité** : $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$. **Composée** : la dérivée $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, lue à l'envers, donne une primitive de $(v' \circ u) \times u'$.

primitives de référence (F′ = f)

f(x)	une primitive F(x)	sur
k (réel)	kx	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \geqslant 2$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	ln x	$]0\,;\,+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
cos x	sin x	$\mathbb{R}$
sin x	−cos x	$\mathbb{R}$

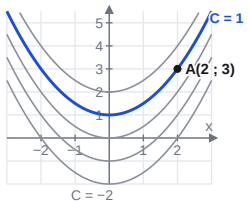
formes composées (u dérivable sur I)

fonction	primitive	condition
$u'e^u$	e^u	
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$; $u \neq 0$ si $n < 0$
$\dfrac{u'}{u}$	ln u	u > 0
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u > 0
u′ cos u	sin u	
u′ sin u	−cos u	
f(ax + b)	$\dfrac{1}{a}$ F(ax + b)	a ≠ 0
(v′∘u) × u′	**v∘u**	règle générale

À gauche, la table des dérivées lue de droite à gauche ; à droite, la règle générale (en bleu) et ses cas usuels. Toute primitive est définie à une constante près.

PROPRIÉTÉ

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante (démontré). Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les $x \mapsto F(x) + C$, C réel. *Preuve* : $(F + C)' = f$. Réciproquement, si $G' = f$, alors $(G - F)' = 0$ sur I ; une fonction de dérivée nulle sur un **intervalle** est constante (rappel de première), donc $G = F + C$. **Conséquence** : une **seule** primitive vérifie $F(x_0) = y_0$, pour $x_0 \in I$ et y_0 réel donnés.



Les primitives $\frac{x^2}{2} + C$ de $x \mapsto x$: des translatées verticales. Une seule passe par $A(2\,;3)$: $C = 1$.

CALCULER UNE PRIMITIVE

1. **Découper par linéarité** et sortir les constantes multiplicatives.
2. **Reconnaître** une ligne du tableau, ou une forme $(v' \circ u) \times u'$: repérer u et chercher u' **en facteur** ; s'il n'y est qu'à une constante près, multiplier et diviser : $x\,\mathrm{e}^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$, de primitive $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}$.
3. **Vérifier en dérivant**, puis ajouter C, ou la fixer par la condition imposée.

une primitive se devine, une dérivée se calcule : le contrôle n'est jamais facultatif.

EXEMPLE

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et de $g(x) = (2x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$, puis la primitive H de $h(x) = \mathrm{e}^{2x} + \sin x$ telle que $H(0) = 1$.

1. $f = \frac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$: $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
2. $g = \frac{1}{2}u'u^3$ avec $u(x) = 2x - 1$, et u^3 a pour primitive $\dfrac{u^4}{4}$: $G(x) = \dfrac{(2x-1)^4}{8}$, car $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
3. $H(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \cos x + C$, donc $H(0) = \frac{1}{2} - 1 + C = 1$: $C = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1),\ G(x) = \frac{(2x-1)^4}{8},\ H(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \cos x + \frac{3}{2}.$$

PIÈGE

Donner e^{3x} pour primitive de e^{3x}, ou $\sin(2x)$ pour celle de $\cos(2x)$. — $\left(\mathrm{e}^{3x}\right)' = 3\,\mathrm{e}^{3x}$: le facteur $u' = 3$ manque. Il faut $\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}$ et $\frac{1}{2}\sin(2x)$.

Ce que ça coûte : la primitive, et l'intégrale ou la condition qui l'utilisent.

Le réflexe : dériver la réponse : on doit retrouver **exactement** f.

PIÈGE

Prendre le produit des primitives : « $x\,\mathrm{e}^x$ a pour primitive $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x$ ». — la dérivée de $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^x$ vaut $\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x$: un produit ne se dérive pas facteur par facteur.

Ce que ça coûte : tout le calcul qui suit.

Le réflexe : chercher une forme $(v' \circ u) \times u'$; sinon, intégrer par parties (fiche « Intégration »).

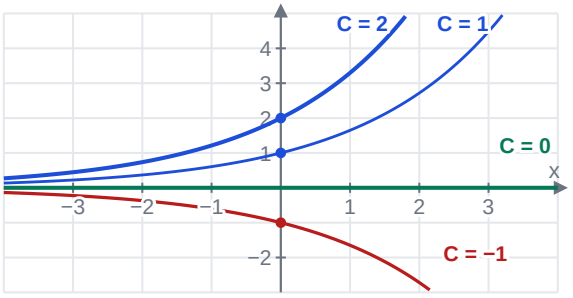
2 L'équation y′ = ay

PROPRIÉTÉ

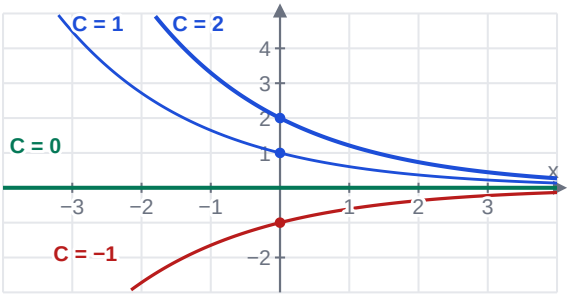
Résolution de $y' = ay$, a réel (démontrée). Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}$, C réel. *Preuve* : $(C\,\mathrm{e}^{ax})' = a\,C\,\mathrm{e}^{ax}$. Réciproquement, si f est solution, $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ax}$ vérifie $g'(x) = \left(f'(x) - af(x)\right)\mathrm{e}^{-ax} = 0$: g est constante, égale à un réel C, et $f(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$. **Condition initiale** : une seule solution vérifie $y(x_0) = y_0$, avec $C = y_0\,\mathrm{e}^{-ax_0}$. **Comme $b = 0$**, la somme de deux solutions et le produit d'une solution par une constante sont encore solutions, car $(f+g)' = a(f+g)$.

$$y' = ay \iff y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}$$

y′ = ay avec a = 0,5 > 0



y′ = ay avec a = −0,5 < 0



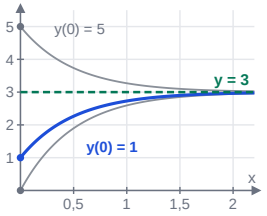
Chaque courbe passe par $(0\,;C)$. Comme $\mathrm{e}^{ax}>0$, $C\,\mathrm{e}^{ax}$ a le signe de C et sa dérivée $aC\,\mathrm{e}^{ax}$ celui de aC : croissante si a et C ont le même signe. Seule la solution nulle coupe l'axe des abscisses.

3 Les équations y′ = ay + b et y′ = ay + f

PROPRIÉTÉ

Solutions de $y'=ay+b$, $a\neq 0$. Une constante k est solution si et seulement si $0=ak+b$: $k=-\dfrac{b}{a}$ est l'**unique solution constante**. Comme $ak+b=0$, $(y-k)'=y'$ et $a(y-k)=ay+b$: y est solution si et seulement si $y-k$ est solution de $y'=ay$. D'où les solutions $x\mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{b}{a}$, C réel.

$$y'=ay+b \iff y(x)=C\,\mathrm{e}^{ax}-\frac{b}{a}$$



$y'=-2y+6$: les solutions de valeurs initiales 0, 1 et 5 tendent toutes vers la solution constante 3 ($a<0$).

PROPRIÉTÉ

Avec un second membre f. Si p est une solution particulière de $y'=ay+f$ sur I, les solutions sont les $x\mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}+p(x)$: comme $p'-ap=f$, l'égalité $y'-ay=f$ équivaut à $(y-p)'=a(y-p)$. Exemple : $p(x)=x+1$ vérifie $y'=y-x$, car $p'(x)=1=p(x)-x$; les solutions sont les $x\mapsto C\,\mathrm{e}^{x}+x+1$.

RÉSOUDRE AVEC UNE CONDITION INITIALE

1. **Mettre sous la forme** $y'=ay+b$ et lire a, b avec leurs signes : $y'+2y=6$ s'écrit $y'=-2y+6$, et $2y'=3y$ s'écrit $y'=\dfrac{3}{2}y$.
2. **Solution constante** $k=-\dfrac{b}{a}$ (aucune si $b=0$), puis **toutes les solutions** $y(x)=C\,\mathrm{e}^{ax}+k$.
3. **Appliquer la condition** $y(x_0)=y_0$ **à l'expression complète**, en déduire C, puis vérifier en dérivant.
   avec une solution particulière p donnée : vérifier d'abord que p est solution, puis écrire $y=C\,\mathrm{e}^{ax}+p$.

EXEMPLE

Résoudre $y'+2y=6$ avec $y(0)=1$.

1. $y'=-2y+6$: $a=-2$, $b=6$. Solution constante : $k=-\frac{6}{-2}=3$
2. $y(x)=C\,\mathrm{e}^{-2x}+3$, et $y(0)=C+3=1$: $C=1-3=-2$

$y(x)=3-2\,\mathrm{e}^{-2x}$ **: la courbe bleue ci-dessus, qui croît de 1 vers 3.**

PIÈGE

Écrire les solutions de $y' = ay$ sous la forme $\mathrm{e}^{ax} + C$. — sa dérivée $a\,\mathrm{e}^{ax}$ ne vaut pas $a\,(\mathrm{e}^{ax} + C)$ si $aC \neq 0$.

Ce que ça coûte : toutes les solutions.

Le réflexe : la constante **multiplie** : $C\,\mathrm{e}^{ax}$.

PIÈGE

Prendre $\dfrac{b}{a}$ pour solution constante. — pour $y' = -2y + 6$, $-2 \times (-3) + 6 = 12 \neq 0$.

Ce que ça coûte : toutes les solutions.

Le réflexe : contrôler que $ak + b = 0$.

PIÈGE

Écrire $C = 1$ pour $y = C\,\mathrm{e}^{-2x} + 3$ et $y(0) = 1$. — $y(0) = C + 3$, donc $C = -2$.

Ce que ça coûte : la solution demandée.

Le réflexe : calculer $y(x_0)$ avec toute l'expression.

4 Approcher une solution : la méthode d'Euler

CONSTRUIRE UNE SOLUTION APPROCHÉE PAR LA MÉTHODE D'EULER

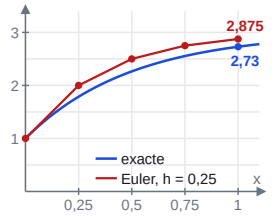
1. **Partir du point connu** $(x_0\,;y_0)$, choisir un pas $h > 0$ et poser $x_{k+1} = x_k + h$.
2. **Avancer sur la tangente** : $y(x+h) \approx y(x) + h\,y'(x)$. Pour $y' = f$: $y_{k+1} = y_k + h\,f(x_k)$; pour $y' = ay + b$: $y_{k+1} = y_k + h\,(ay_k + b) = (1 + ah)\,y_k + hb$.
3. **Répéter et relier les points** : la ligne brisée approche la courbe, d'autant mieux que h est petit.

EXEMPLE

Pour $y' = -2y + 6$ et $y(0) = 1$, appliquer Euler avec $h = 0{,}25$ jusqu'à $x = 1$, et comparer avec $3 - 2\,\mathrm{e}^{-2x}$.

1. $y_{k+1} = y_k + 0{,}25\,(-2y_k + 6) = 0{,}5\,y_k + 1{,}5$: $y_1 = 2$, $y_2 = 2{,}5$, $y_3 = 2{,}75$, puis $0{,}5 \times 2{,}75 + 1{,}5 = 2{,}875$
2. Valeur exacte en 1, avec $\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135335$: $3 - 2 \times 0{,}135335 \approx 2{,}73$

Euler donne $2{,}875$ pour $y(1) \approx 2{,}73$: l'écart diminue avec le pas.



La courbe exacte est concave : les segments, portés par des tangentes, passent au-dessus. Valeur approchée par excès.

```
from math import exp
def euler(phi, x0, y0, h, n):                    # phi(x, y) : valeur de y′ en (x ; y)
    xs, ys = [x0], [y0]                          # listes des x et des y
    for k in range(n):
        ys.append(ys[-1] + h * phi(xs[-1], ys[-1]))   # y(x + h) ≈ y(x) + h × y′(x)
        xs.append(xs[-1] + h)
    return xs, ys
def phi1(x, y): return -2 * y + 6                # y′ = −2y + 6 : forme ay + b
def phi2(x, y): return exp(-x ** 2)              # y′ = f(x)
print(euler(phi1, 0, 1, 0.25, 4)[1])            # [1, 2.0, 2.5, 2.75, 2.875]
print(euler(phi2, 0, 0, 0.5, 2)[1])             # [0, 0.5, 0.8894003915357025]
```

Une seule fonction pour deux équations ; la seconde approche une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Euler pour $y' = f$ donne $y_n = y_0 + h\big(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1})\big)$, une somme d'aires de rectangles (fiche « Intégration »).

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit **une** primitive, avec u' en facteur, et vérifié en dérivant ?
- L'équation est-elle écrite **exactement** sous la forme $y' = ay + b$, signes compris ?
- Solution constante $k = -\dfrac{b}{a}$, contrôlée par $ak + b = 0$?
- Condition initiale appliquée à la solution **complète** $C\,\mathrm{e}^{ax} + k$?

À RETENIR

- F est une primitive de f sur I si $F' = f$; deux primitives diffèrent d'une constante, et une condition $F(x_0) = y_0$ n'en laisse qu'une.
- $(v' \circ u) \times u'$ a pour primitive $v \circ u$: $u'\,\mathrm{e}^{u} \to \mathrm{e}^{u}$, $u'u^n \to \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$, $\dfrac{u'}{u} \to \ln u$ si $u > 0$.
- $y' = ay$: $y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax}$, C réel.
- $y' = ay + b$, $a \neq 0$: $y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$; si p est une solution de $y' = ay + f$, $y = C\,\mathrm{e}^{ax} + p$.
- Euler : $y_{k+1} = y_k + h \times y'(x_k)$, soit $y_k + h\,(ay_k + b)$ pour $y' = ay + b$.