EXERCICES

Équations y′ = ay + b — Primitives et équations différentielles

Tle

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. ●○○

a. $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$ sur $\mathbb{R}$

b. $g(x) = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$

c. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2\cos x$ sur $]0\,;+\infty[$

d. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 0$.

2 Vrai ou faux ? Justifier. ●○○

a. « $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$. »

b. « La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$ est solution de $y' = y$. »

c. « Si f et g sont solutions de $y' = 2y + 1$, alors $f + g$ aussi. »

d. « Toute solution de $y' = -y$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. »

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. « $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0\,;+\infty[$. »		
b. « La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$ est solution de $y' = y$. »		
c. « Si f et g sont solutions de $y' = 2y + 1$, alors $f + g$ aussi. »		
d. « Toute solution de $y' = -y$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. »		

3 **Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction, en reconnaissant une forme $(v' \circ u) \times u'$.** ●●○

a. $f(x) = x\,(x^2+1)^3$

b. $g(x) = \dfrac{3x}{x^2+4}$

c. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

d. $k(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$

4 **Résoudre chaque équation différentielle, puis déterminer la solution qui vérifie la condition donnée.** ●●○

a. $y' = 0{,}5y$, avec $y(0) = -3$

b. $y' + 4y = 8$, avec $y(0) = 0$

c. $3y' - y = 6$, avec $y(3) = 0$

5 **On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}5y + 1$.** ●●○

a. Déterminer toutes les solutions de (E), puis celles, f_1, f_2 et f_3, qui valent 0, 2 et 4 en 0.

b. Donner le sens de variation et la limite en $+\infty$ de chacune.

c. Calculer $f_1(2)$ et $f_3(2)$ au centième, puis tracer les trois courbes sur $[0\,;6]$, avec 1 cm pour une unité.

d. Justifier que deux courbes de solutions distinctes de (E) ne se coupent jamais.

6 **On considère (E) : $y' = -y + 2x + 1$ et la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2x - 1$.** ●●○

a. Vérifier que p est solution de (E).

b. Démontrer que y, dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de $y' = -y$.

c. En déduire les solutions de (E), puis la solution g telle que $g(0) = 0$, et $g(1)$ au centième.

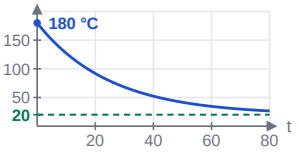
7 **Refroidissement. Un plat sort du four à 180 °C dans une pièce à 20 °C. Sa température $\theta(t)$, en °C, t minutes après, vérifie $\theta' = -0{,}04\,\theta + 0{,}8$ et $\theta(0) = 180$.** ●●○

a. Déterminer la solution constante de l'équation et l'interpréter.

b. Exprimer $\theta(t)$, puis calculer $\theta(10)$ arrondie au degré.

c. Étudier le sens de variation de θ et sa limite en $+\infty$; interpréter.

d. Au bout de combien de minutes le plat est-il à 50 °C ? Arrondir au dixième.



$\theta(t)$ en °C, t en minutes.

8 **Méthode d'Euler. On considère (E) : $y' = 0{,}5y + 1$ avec $y(0) = 0$, et la méthode d'Euler de pas $h = 0{,}2$ définie par $x_k = 0{,}2k$, $y_0 = 0$ et $y_{k+1} = y_k + h\,(0{,}5\,y_k + 1)$.** ●●●

a. Montrer que $y_{k+1} = 1{,}1\,y_k + 0{,}2$, puis calculer y_1, y_2 et y_3.

b. On pose $v_k = y_k + 2$. Montrer que (v_k) est géométrique, puis exprimer y_k en fonction de k.

c. Déterminer la solution exacte de (E), puis comparer y_5 et la valeur exacte en 1, au millième.

d. Expliquer pourquoi la méthode donne ici des valeurs trop petites.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Équations y′ = ay + b — Primitives et équations différentielles ».