

Géométrie dans l'espace — produit scalaire, plans et distances

Corrigé détaillé
8 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Produit scalaire et norme.

- ① a. On multiplie coordonnée par coordonnée puis on additionne.
 $2 - 4 + 3 = 1$
- ② b. Le produit scalaire vaut 1, non nul.
 $1 - 0 = 1$
ils ne sont pas orthogonaux.
- ③ c. Somme des carrés des coordonnées de $\vec{v}$.
 $1 + 16 + 1 = 18$
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

2 Angle entre deux vecteurs.

- ① a. Le produit scalaire vaut le premier terme seul, les autres étant nuls.
 $1 + 0 + 0 = 1$
- ② Les normes : $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\|^2 = 2$.
 $1 + 1 + 0 = 2$
- ③ On divise le produit scalaire par le produit des normes.
 $1 \div 1.4142135623730951 = 0.7071067811865475$
 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ④ b. C'est une valeur remarquable.
 $90 \div 2 = 45$
 $\theta = 45^\circ$, soit $\frac{\pi}{4}$.
- ⑤ c. Le produit scalaire vaut -2 , négatif.
 $0 - 2 = -2$
l'angle est **obtus** — le signe suffit, aucun calcul de norme n'est nécessaire.

3 Lire un plan.

- ① a. Les trois premiers coefficients, lus directement.
 $3 - 2 = 1$
 $\vec{n}(3; -2; 1)$.
- ② b. On remplace : $3 \times 1 - 2 \times 1 + 4 - 5$.
 $3 - 2 + 4 - 5 = 0$
l'équation est vérifiée : A appartient au plan.
- ③ c. On remplace de même.
 $0 - 0 + 5 - 5 = 0$
 B y appartient également.

4 Équation d'un plan.

- ① a. L'équation s'écrit $x + 3y - 2z + d = 0$. On y injecte $A : 2 + 0 - 2$.
 $2 + 0 - 2 = 0$
 - ② Il faut donc $0 + d = 0$.
 $0 - 0 = 0$
 $d = 0$, et le plan a pour équation $x + 3y - 2z = 0$: il passe par l'origine.
 - ③ b. On teste B dans l'équation.
 $0 + 0 - 0 = 0$
l'équation est vérifiée : B appartient au plan. C'était prévisible — $d = 0$ signifie exactement que le plan passe par l'origine.
-

5 Distance point-plan. Soit $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 3 = 0$.

- ① a. Le numérateur : $1 + 2 + 2 - 3$.
 $1 + 2 + 2 - 3 = 2$
 - ② Le dénominateur, norme de $\vec{n}(1; 2; 2)$.
 $1 + 4 + 4 = 9$
 - ③ Sa racine vaut 3, d'où la distance.
 $2 \div 3 = 0.6666666666666666$
 $d(A; \mathcal{P}) = \frac{2}{3}$.
 - ④ b. Le numérateur vaut $|-3| = 3$.
 $3 \div 3 = 1$
 $d(O; \mathcal{P}) = 1$.
 - ⑤ c. Sa distance n'est pas nulle.
 $2 - 0 = 2$
 A n'appartient donc pas au plan — il en est plus proche que l'origine.
-

6 Représentation paramétrique.

- ① a. On applique la formule, coordonnée par coordonnée.
 $2 + 3 = 5$
 $x = 2 + 3t, y = 1 - t, z = 2t$.
 - ② b. La première coordonnée impose $2 + 3t = 5$, donc $t = 1$.
 $3 \div 3 = 1$
 - ③ On vérifie que cette **même** valeur convient aux deux autres.
 $1 - 1 = 0$
 $y = 0 \checkmark$ et $z = 2 \checkmark$: B appartient à la droite.
 - ④ c. Le même $t = 1$ donnerait $z = 2$, et non 3.
 $3 - 2 = 1$
aucune valeur de t ne convient aux trois coordonnées à la fois : C n'appartient pas à la droite. C'est l'accord des **trois** égalités qui décide, jamais une seule.
-

7 Positions relatives. Soient $\mathcal{P} : 2x - y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 4x - 2y + 2z + 5 = 0$.

- ① a. Lecture directe des coefficients.
 $2 - 1 = 1$
 $\vec{n}(2; -1; 1)$ et $\vec{n}'(4; -2; 2)$.
 - ② b. Chaque coordonnée de $\vec{n}'$ vaut le double de celle de $\vec{n}$.
 $4 \div 2 = 2$
 $\vec{n}' = 2\vec{n}$: ils sont colinéaires.
 - ③ c. Les plans sont donc parallèles. Reste à voir s'ils sont confondus : on double la première équation, ce qui donne $4x - 2y + 2z - 2 = 0$.
 $-1 \times 2 = -2$
 - ④ Les constantes diffèrent — -2 contre $+5$.
 $5 - -2 = 7$
les plans sont **strictement** parallèles, sans point commun.
-

8 Droite et plan. La droite $\mathcal{D}$ passe par $A(1; 0; 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 1)$. Soit $\mathcal{P} : x - y + z - 3 = 0$.

- ① a. $\vec{n}(1; -1; 1)$, et l'on calcule le produit scalaire.
 $1 - 2 + 1 = 0$
- ② b. Le produit est nul : la direction de $\mathcal{D}$ est contenue dans celle de $\mathcal{P}$.
 $0 - 0 = 0$
la droite est parallèle au plan — reste à savoir si elle y est incluse.
- ③ c. On teste le point A dans l'équation : $1 - 0 + 2 - 3$.
 $1 - 0 + 2 - 3 = 0$

l'équation est vérifiée : A appartient au plan, donc $\mathcal{D}$ est **inclus** dans $\mathcal{P}$, et non strictement parallèle.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Produit scalaire et norme exacts	3 pts	La troisième coordonnée oubliée
Vecteur normal lu sur l'équation	3 pts	Un vecteur normal recalculé inutilement, avec erreur
d déterminé par un point et vérifié	4 pts	Un signe de d inversé, et toutes les distances fausses
Formule de distance complète	4 pts	La valeur absolue omise, et une distance négative
Colinéarité des normaux justifiée	3 pts	Deux plans dits parallèles sans le montrer
Inclusion écartée par un point	3 pts	« Parallèle » conclu du seul produit scalaire nul