

COURS

Géométrie dans l'espace — produit scalaire, plans et distances

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Passer du plan à l'espace ajoute une coordonnée, et change une chose essentielle : **une équation ne décrit plus une droite mais un plan**. C'est le renversement à intégrer. Le fil du chapitre tient alors en un objet, le **vecteur normal** : il définit un plan, il donne son équation, il mesure la distance d'un point à ce plan, et il tranche toutes les questions de position relative. Presque chaque exercice revient à le trouver, puis à faire un produit scalaire.

1 Vecteurs et produit scalaire

DÉFINITION

Dans un repère **orthonormé**, le produit scalaire de $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ vaut $xx' + yy' + zz'$: la formule du plan, avec un terme de plus. Sa propriété décisive est inchangée — il est **nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux**. La **norme** s'en déduit : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, qui est le théorème de Pythagore appliqué deux fois.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad ; \quad \vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs sont **colinéaires** lorsque l'un est un multiple de l'autre : $\vec{v} = k\vec{u}$. Trois vecteurs sont **coplanaires** lorsque l'un s'écrit comme combinaison des deux autres, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ — ce qui revient à dire qu'ils tiennent tous trois dans un même plan. C'est la notion qui remplace la colinéarité pour décider si quatre points de l'espace sont dans un même plan, question que la géométrie plane ne pouvait pas poser.

PROPRIÉTÉ

Le produit scalaire mesure aussi un **angle** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, où θ est l'angle géométrique entre les deux vecteurs. On en tire $\cos \theta$ par division, puis θ à la calculatrice. Le **signe** du produit scalaire suffit souvent : positif, l'angle est aigu ; nul, il est droit ; négatif, obtus. C'est le même énoncé que l'orthogonalité, lu sous un autre jour — $\cos \theta = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ disent la même chose.

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

EXEMPLE

Soient $\vec{u}(1; 2; -1)$ et $\vec{v}(3; -1; 1)$. Sont-ils orthogonaux ? Quelle est la norme de $\vec{u}$?

- ① On calcule le produit scalaire, coordonnée par coordonnée : 1×3 , puis $2 \times (-1)$, puis $(-1) \times 1$.
 $3 - 2 - 1 = 0$
le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.
- ② Pour la norme, on somme les carrés.
 $1 + 4 + 1 = 6$
- ③ Puis on prend la racine.
 $\sqrt{6} = 2.449489742783178$
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{6} \approx 2,45$ — on garde la valeur exacte.

Orthogonaux, et $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$.

2 Le plan et son vecteur normal

DÉFINITION

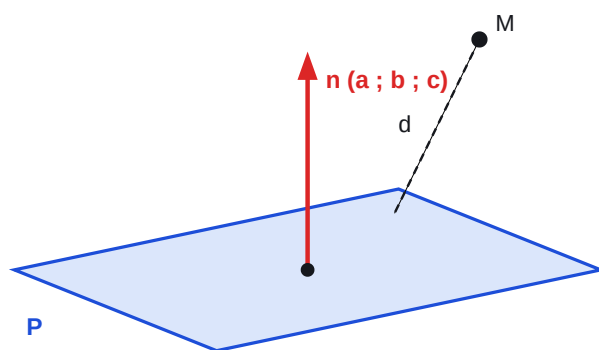
Un vecteur $\vec{n}$ non nul est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'il est orthogonal à **tous** les vecteurs de ce plan. Il suffit en pratique qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : les autres s'en déduisent. Un plan possède une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux — c'est la **direction** qui compte, pas la longueur.

RÈGLE

Tout plan admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$, et le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ formé des trois premiers coefficients est **normal** à ce plan. La réciproque vaut aussi : connaissant un vecteur normal et un point, on connaît l'équation. C'est la correspondance centrale du chapitre, et elle se lit dans les deux sens — d'une équation on tire un vecteur normal par simple lecture, sans aucun calcul.

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \iff \vec{n}(a; b; c) \text{ normal à } \mathcal{P}$$

les coefficients de l'équation SONT les coordonnées du vecteur normal



$\vec{n}$ est orthogonal à toute droite du plan

équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0$$

$M(x; y; z)$ appartient au plan
si et seulement si l'équation est vraie

distance point-plan

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

valeur absolue en haut : une distance est positive

Le vecteur normal, l'équation cartésienne et la distance d'un point au plan.

TROUVER L'ÉQUATION D'UN PLAN

- ① **Obtenir un vecteur normal.** Ou bien l'énoncé le donne, ou bien on le cherche : $\vec{n}(a; b; c)$ orthogonal à deux vecteurs du plan donne deux équations, qu'on résout en fixant arbitrairement une coordonnée.
- ② **Écrire** $ax + by + cz + d = 0$ avec les coordonnées trouvées, en laissant d inconnu.
- ③ **Utiliser un point du plan** pour déterminer d : on remplace x, y, z par ses coordonnées, et l'équation donne d .
- ④ **Vérifier sur un autre point** connu du plan.
une erreur de signe sur d est invisible autrement, et fausse toutes les distances calculées ensuite.

EXEMPLE

Déterminer l'équation cartésienne du plan passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; 1; 2)$.

- ① Les coefficients sont les coordonnées de $\vec{n}$: l'équation s'écrit $2x + y + 2z + d = 0$.
- ② On remplace par les coordonnées de A : 2×1 , puis 2 , puis 2×3 .
 $2 + 2 + 6 = 10$
- ③ Il faut donc $10 + d = 0$.
 $0 - 10 = -10$
 $d = -10$.
- ④ Vérification sur A : la somme doit être nulle.
 $10 - 10 = 0$

$$\mathcal{P} : 2x + y + 2z - 10 = 0$$

EXEMPLE

Déterminer une équation du plan passant par $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; 1)$.

- ① On forme deux vecteurs du plan : $\vec{AB}(-1; 1; 0)$ et $\vec{AC}(-1; 0; 1)$. Ils ne sont pas colinéaires, donc ils dirigent bien un plan.
- ② On cherche $\vec{n}(a; b; c)$ orthogonal aux deux : $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -a + b = 0$ donne $b = a$.
 $0 - 1 + 1 = 0$
- ③ Et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -a + c = 0$ donne $c = a$. On fixe $a = 1$, ce qui est licite : seule la direction compte.
 $1 - 1 = 0$
 $\vec{n}(1; 1; 1)$ convient.
- ④ L'équation s'écrit $x + y + z + d = 0$, et le point A donne d .
 $1 + 0 + 0 - 1 = 0$
 $d = -1$.
- ⑤ Vérification sur B , qui doit annuler l'équation.
 $0 + 1 + 0 - 1 = 0$
et de même pour C : les trois points conviennent.

$$x + y + z - 1 = 0$$

3 Distance d'un point à un plan

RÈGLE

La **distance** du point $M(x_0; y_0; z_0)$ au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ vaut $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Le numérateur est le membre de gauche de l'équation évalué en M — il vaut 0 exactement quand M appartient au plan, ce qui donne une distance nulle, comme il se doit. La **valeur absolue** est indispensable : une distance ne peut pas être négative, et sans elle le signe du résultat dépendrait du côté du plan où se trouve le point.

$$d(M; \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

EXEMPLE

Calculer la distance de l'origine $O(0; 0; 0)$ au plan $2x + y + 2z - 6 = 0$.

- ① On évalue le membre de gauche en O : les trois premiers termes sont nuls, il reste -6 .
 $0 - 6 = -6$
- ② On en prend la valeur absolue.
 $0 + 6 = 6$
- ③ Au dénominateur, la norme du vecteur normal $\vec{n}(2; 1; 2)$.
 $4 + 1 + 4 = 9$
- ④ Sa racine est entière.
 $\sqrt{9} = 3$
- ⑤ On divise.
 $6 \div 3 = 2$
la distance vaut 2 unités.

$$d(O; \mathcal{P}) = 2$$

4 Représenter une droite

DÉFINITION

Une droite de l'espace n'a **pas** d'équation cartésienne unique — une seule équation y décrit un plan. On la décrit donc par un **paramètre** : la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM} = t\vec{u}$, avec t parcourant $\mathbb{R}$. En coordonnées, cela donne trois égalités. Chaque valeur de t fournit **un** point de la droite : $t = 0$ redonne A , $t = 1$ le point $A + \vec{u}$.

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

TROUVER L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

- ① **Écrire la représentation paramétrique** de la droite, si l'énoncé ne la donne pas.
- ② **Substituer x , y et z** dans l'équation du plan : il ne reste qu'une équation à une inconnue, le paramètre t .
- ③ **Résoudre en t** , et lire le résultat. Une solution unique donne le point d'intersection ; **aucune** solution — une égalité impossible comme $0 = 5$ — signifie que la droite est strictement parallèle ; une **infinité** — l'égalité $0 = 0$ — qu'elle est incluse dans le plan.
- ④ **Remplacer t par sa valeur** dans la paramétrique pour obtenir les coordonnées du point, puis vérifier qu'il satisfait l'équation du plan.
les trois cas de position relative sortent ainsi d'un seul calcul, sans avoir à tester séparément le produit scalaire et l'appartenance.

EXEMPLE

La droite $\mathcal{D}$ passe par $A(1; 0; 2)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 1)$. Déterminer son intersection avec le plan $\mathcal{P} : 2x + y - z - 1 = 0$.

- ① La représentation paramétrique s'écrit $x = 1 + t, y = 2t, z = 2 + t$.
- ② On substitue dans l'équation du plan et l'on regroupe les termes en t : $2 \times 1 + 2 \times 1 - 1 \times 1$.
 $2 + 2 - 1 = 3$
le coefficient de t vaut 3.
- ③ Puis les termes constants : $2 \times 1 + 0 - 2 - 1$.
 $2 - 2 - 1 = -1$
- ④ L'équation devient $3t - 1 = 0$.
 $1 \div 3 = 0.3333333333333333$
une solution unique : la droite et le plan sont sécants.
- ⑤ On reporte $t = \frac{1}{3}$ dans la paramétrique.
 $1 + 0.3333333333333333 = 1.3333333333333333$
le point d'intersection est $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Un unique point d'intersection : $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

5 Positions relatives

RÈGLE

Toutes les positions relatives se tranchent avec les mêmes outils. **Deux plans** : leurs vecteurs normaux sont colinéaires $\Rightarrow$ parallèles ; sinon, sécants selon une droite. **Une droite et un plan** : si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la droite est parallèle au plan — et **incluse** dedans si l'un de ses points y appartient ; sinon, ils sont sécants en un point. **Deux droites** : vecteurs directeurs colinéaires $\Rightarrow$ parallèles ; sinon, sécantes ou **non coplanaires**, et l'on tranche en cherchant un point commun par résolution du système.

tout se ramène au vecteur normal et au vecteur directeur

objets	on regarde	cas possibles
deux plans	n et n' colinéaires ?	parallèles, ou sécants
droite et plan	$u \cdot n = 0$?	parallèles, ou sécants
deux droites	u et u' colinéaires ?	parallèles, sécantes, ou non coplanaires

$u \cdot n = 0$ ne suffit pas : si un point de la droite est dans le plan, elle y est incluse

Trois questions, trois tests — et le cas d'inclusion qu'un produit scalaire nul ne suffit pas à écarter.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Conclure d'un produit scalaire nul $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ que la droite est parallèle au plan, sans plus. — cette égalité dit seulement que la direction de la droite est contenue dans celle du plan. Deux cas restent possibles : la droite est **strictement parallèle**, ou elle est **incluse** dans le plan. La distinction n'a rien de formel — dans le second cas, la droite a une infinité de points communs avec le plan, dans le premier aucun.

Le réflexe : prendre un point de la droite et l'injecter dans l'équation du plan. Si l'équation est vérifiée, la droite est incluse ; sinon, elle est strictement parallèle.

Une comparaison éclaire tout le chapitre : **dans le plan, une équation décrit une droite ; dans l'espace, elle décrit un plan**. À chaque fois, une équation retire une dimension. Il en découle qu'une droite de l'espace, qui a deux dimensions de moins que lui, se décrit par **deux** équations — c'est-à-dire comme l'**intersection de deux plans** non parallèles. La représentation paramétrique et le système de deux équations décrivent donc le même objet : la première dit comment le parcourir, le second à quelles conditions on s'y trouve.

À VÉRIFIER

- Le repère est-il **orthonormé** ? Sans quoi la formule du produit scalaire ne s'applique pas.
- Ai-je lu le vecteur normal directement sur les coefficients de l'équation ?
- Ai-je déterminé d avec un point, puis **vérifié** ?
- La valeur absolue figure-t-elle au numérateur de la distance ?
- Le dénominateur est-il la **norme du vecteur normal**, et non autre chose ?
- Pour une droite parallèle : ai-je testé un point pour écarter l'inclusion ?

À RETENIR

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ — en repère **orthonormé** seulement.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff$ orthogonaux · $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- $ax + by + cz + d = 0$: $\vec{n}(a; b; c)$ est normal — lecture directe.
- Un point donne d ; on vérifie ensuite sur un second point.
- $d(M; \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ — valeur absolue en haut.
- Plans parallèles $\iff$ normaux colinéaires ; confondus si les équations sont proportionnelles.
- $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$: parallèle **ou incluse** — tester un point pour trancher.