

Intégration — primitives, intégrale définie et valeur moyenne

Corrigé détaillé
7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Déterminer une primitive.

- ① a. On remonte terme à terme : $4x^3$ vient de x^4 .
 $4 \div 4 = 1$
 $F(x) = x^4 - 3x^2 + C$.
- ② b. $\frac{1}{x}$ a pour primitive $\ln x$, et la constante 2 se conserve.
 $2 \times 1 = 2$
 $G(x) = 2 \ln x + C$.
- ③ c. L'exponentielle est sa propre primitive, et cos donne sin.
 $1 - 1 = 0$
 $H(x) = e^x + \sin x + C$.

2 Calculer les intégrales.

- ① a. Une primitive est $\frac{x^3}{3} + x$, qu'on évalue en 2.
 $8 \div 3 = 2.6666666666666665$
- ② On ajoute 2 et l'on retranche la valeur en 0, qui est nulle.
 $2.6666666666666665 + 2 = 4.666666666666667$
soit $\frac{14}{3} \approx 4,67$.
- ③ b. Primitive $\ln x$, avec $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$.
 $1 - 0 = 1$
l'intégrale vaut exactement 1.
- ④ c. Primitive e^x , donc $e^1 - e^0$.
 $1 - 0 = 1$
soit $e - 1 \approx 1,72$.

3 Primitive avec condition initiale.

- ① a. Les primitives s'écrivent $x^2 + 3x + C$.
 $2 \div 2 = 1$
- ② En 0, il ne reste que C , qu'on identifie à 5.
 $0 + 0 + 5 = 5$
 $F(x) = x^2 + 3x + 5$.
- ③ b. Les primitives sont $e^x + C$, et $e^0 = 1$.
 $0 - 1 = -1$
 $C = -1$, donc $G(x) = e^x - 1$.

4 Primitives de formes composées.

- ① a. $u = x^2$, $u' = 2x$: la dérivée de l'intérieur est bien en facteur.
 $2 \times 1 = 2$
 $F(x) = e^{x^2} + C$.
- ② b. $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: c'est la forme $\frac{u'}{u}$.
 $0 + 1 = 1$
 $G(x) = \ln(x^2 + 1) + C$ — le dénominateur étant toujours positif, la valeur absolue est inutile.
- ③ c. $u = 3x + 1$, $u' = 3$: c'est la forme $u' u^4$.
 $4 + 1 = 5$
 $H(x) = \frac{(3x + 1)^5}{5} + C$.
-

5 Aire et signe.

- ① a. Une primitive est $\frac{x^2}{2}$, qui prend la même valeur en -1 et en 1 .
 $0.5 - 0.5 = 0$
l'intégrale vaut 0.
- ② b. Une aire nulle supposerait un domaine vide, ce qui n'est pas le cas : deux triangles existent bel et bien.
 $1 - 1 = 0$
les deux parts se compensent, l'une comptant négativement.
- ③ c. On coupe en 0, où f change de signe, et l'on prend la valeur absolue de chaque morceau.
 $1 \div 2 = 0.5$
- ④ Chaque triangle a pour aire $\frac{1}{2}$.
 $0.5 + 0.5 = 1$
l'aire totale vaut 1 unité d'aire.
-

6 Intégration par parties.

- ① a. $u = \ln x$ donne $u' = \frac{1}{x}$; $v' = 1$ donne $v = x$.
 $1 \times 1 = 1$
- ② La formule donne $[x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx$, et le produit sous la nouvelle intégrale se simplifie en 1.
 $1 - 1 = 0$
- ③ Le crochet vaut $e \ln e - 1 \ln 1 = e$, et la nouvelle intégrale $[x]_1^e = e - 1$.
 $1 - 0 = 1$
- ④ On soustrait.
 $1 - 1 + 1 = 1$
le résultat vaut 1.
- ⑤ b. Dériver $\ln x$ le transforme en fraction rationnelle qui se simplifie contre $v = x$.
 $1 \div 1 = 1$
c'est le critère : u est la partie qui se simplifie en dérivant.
-

7 Valeur moyenne. Soit $f(x) = x^2$ sur $[0 ; 3]$.

- ① a. Une primitive est $\frac{x^3}{3}$, évaluée en 3.
 $27 \div 3 = 9$
l'intégrale vaut 9, la valeur en 0 étant nulle.
- ② b. La longueur de l'intervalle vaut 3.
 $3 - 0 = 3$
- ③ On divise l'intégrale par cette longueur.
 $9 \div 3 = 3$
la valeur moyenne vaut 3.
- ④ c. C'est la hauteur du rectangle de base $[0 ; 3]$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.
 $3 \times 3 = 9$
 $3 \times 3 = 9$: on retrouve bien l'intégrale.
-

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Primitive juste, vérifiée par dérivation	4 pts	Un coefficient oublié en remontant
Constante déterminée par la condition	3 pts	Le $+C$ laissé indéterminé
Crochet évalué dans le bon ordre	3 pts	$F(a) - F(b)$ au lieu de $F(b) - F(a)$
Signe de f étudié avant de parler d'aire	4 pts	Une aire annoncée négative
Choix de u et v' justifié	3 pts	Une IPP qui complique l'intégrale
Valeur moyenne interprétée	3 pts	Un nombre donné sans le rectangle équivalent