

COURS

Intégration — primitives, intégrale définie et valeur moyenne

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

L'intégration est la dérivation lue à l'envers, et c'est ce renversement qui la rend puissante : elle permet de **reconstituer une grandeur à partir de sa vitesse de variation**. Connaissant le débit d'un fleuve heure par heure, elle donne le volume écoulé ; connaissant une vitesse, la distance parcourue. Le théorème fondamental établit ce lien, et transforme un calcul d'aire — problème géométrique vieux de deux mille ans — en une soustraction de deux valeurs.

1 Primitives

DÉFINITION

Une fonction F est une **primitive** de f sur un intervalle I lorsque F est dérivable sur I et que $F' = f$. Toute fonction **continue** sur un intervalle en admet, et jamais une seule : si F convient, alors $F + C$ convient aussi pour toute constante C , puisque la dérivée d'une constante est nulle. Deux primitives d'une même fonction diffèrent donc exactement d'une constante — ce qui permet, quand l'énoncé impose une condition comme $F(0) = 2$, de déterminer cette constante et d'obtenir la primitive cherchée.

$$F' = f \text{ sur } I \implies \text{toute primitive s'écrit } F + C$$

la table des dérivées, lue de droite à gauche — et une constante en plus

f (x)	une primitive F (x)
x^n ($n \neq -1$)	$x^{n+1} / (n + 1)$
$1 / x$ sur $]0 ; +\infty[$	$\ln x$
e^x	e^x
$\cos x \cdot \sin x$	$\sin x \cdot -\cos x$
$u' e^u \rightarrow e^u \cdot u'/u \rightarrow \ln u \cdot u'u^n \rightarrow u^{n+1}/(n+1)$	

toute primitive est définie à une constante près : si F convient, $F + C$ aussi, pour tout réel C

Les primitives usuelles : la table des dérivées, lue de droite à gauche.

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ qui vérifie $F(1) = 0$.

① On remonte terme à terme : x^2 vient de $\frac{x^3}{3}$, donc $3x^2$ vient de x^3 .

$$3 \div 3 = 1$$

② De même $-4x$ vient de $-2x^2$, et 5 vient de $5x$.

$$4 \div 2 = 2$$

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + C.$$

③ On impose la condition en calculant $F(1)$.

$$1 - 2 + 5 = 4$$

④ Il faut donc $4 + C = 0$.

$$0 - 4 = -4$$

$C = -4$; une vérification par dérivation confirme le résultat.

$$\underline{F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4}$$

PROPRIÉTÉ

Trois formes **composées** reviennent sans cesse, et ce sont les seules à connaître au-delà de la table. $u'e^u$ a pour primitive e^u ; $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln |u|$; $u'u^n$ a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$. On les reconnaît à un signe : **la dérivée de l'intérieur est déjà là, en facteur**. Quand elle n'y est qu'à une constante près, on l'y met en multipliant et divisant — pour $\int 2x e^{x^2}$, la dérivée de x^2 est $2x$, elle y est : la primitive est e^{x^2} .

$$\int u'e^u = e^u \quad ; \quad \int \frac{u'}{u} = \ln |u| \quad ; \quad \int u'u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

2 L'intégrale définie

RÈGLE

Théorème fondamental du calcul. Si f est continue sur $[a; b]$ et si F en est une primitive, alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, quantité qu'on note $[F(x)]_a^b$. La constante disparaît dans la soustraction : c'est pourquoi on n'écrit pas de $+C$ dans un calcul d'intégrale définie. Le résultat est un **nombre**, et non une fonction — confondre les deux est l'erreur de vocabulaire la plus fréquente du chapitre.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

PROPRIÉTÉ

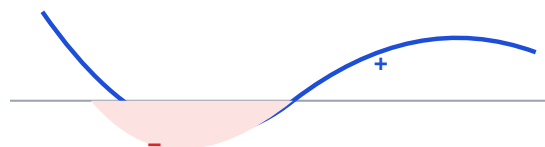
Trois propriétés servent constamment. La **linéarité** : $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$, ce qui autorise à découper une somme et à sortir les constantes. La **relation de Chasles** : $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$, qui permet de couper un intervalle là où la fonction change de signe. Et la **positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$ avec $a \leq b$, alors l'intégrale est positive — d'où, par différence, la conservation de l'ordre entre deux fonctions.

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

l'intégrale compte négativement ce qui est sous l'axe



$f \geq 0$: l'intégrale EST l'aire,
en unités d'aire



**f change de signe : l'intégrale
retranche la partie sous l'axe**

pour l'aire géométrique, découper et prendre $|f|$

Sous l'axe, l'intégrale compte négativement : l'aire géométrique demande un découpage.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Répondre « l'aire vaut -2 » à un calcul d'aire. — une aire est toujours positive ; l'intégrale, elle, compte négativement ce qui est sous l'axe. Quand f change de signe sur $[a ; b]$, l'intégrale donne un bilan algébrique où les deux parties se compensent, et non l'aire du domaine. Une fonction dont l'intégrale est nulle sur un intervalle peut y délimiter une aire considérable.

Le réflexe : étudier le signe de f **avant** d'intégrer. S'il change, couper l'intervalle par la relation de Chasles et prendre la valeur absolue de chaque morceau.

EXEMPLE

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $f(x) = 3x^2 + 2x$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

① Sur $[0 ; 2]$, f est positive — somme de deux termes positifs : l'intégrale donnera bien l'aire.

$$3 \times 4 + 4 = 16$$

② Une primitive est $F(x) = x^3 + x^2$.

$$3 \div 3 = 1$$

③ On évalue en 2.

$$8 + 4 = 12$$

④ Puis en 0, et l'on soustrait.

$$12 - 0 = 12$$

l'unité d'aire est celle du repère.

L'aire vaut 12 unités d'aire.

3 Intégration par parties

RÈGLE

Quand l'intégrande est un **produit** dont aucune primitive n'est connue, la formule d'**intégration par parties** échange une intégrale contre une autre, en espérant qu'elle soit plus simple. Elle est la traduction, en termes d'intégrales, de la dérivée d'un produit. Elle sert typiquement pour $x e^x$, $x \sin x$ ou $\ln x$ — ce dernier en posant $u = \ln x$ et $v' = 1$, ce qui paraît étrange et fonctionne parfaitement.

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

CHOISIR U ET V'

① **Poser u la partie qui se simplifie en dérivant** : un polynôme perd un degré, un $\ln$ devient une fraction rationnelle. C'est le critère décisif.

② **Poser v' la partie dont on sait trouver une primitive** : e^x , $\sin x$, une puissance.

③ **Écrire les quatre quantités u , u' , v' , v** dans un tableau avant d'appliquer la formule — c'est la seule façon de ne pas confondre $u'v$ et uv' .

④ **Vérifier que la nouvelle intégrale est plus simple.** Si elle est pire, le choix de u et v' était inversé : recommencer en les échangeant.

avec $u = e^x$ et $v' = x$ pour $\int x e^x$, on obtient une intégrale de degré 2 — le mauvais sens.

EXEMPLE

Calculer $\int_0^1 x e^x dx$.

① On pose $u = x$ — qui se simplifie en dérivant — et $v' = e^x$, d'où $u' = 1$ et $v = e^x$.

$$1 \times 1 = 1$$

② La formule donne $[x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$.

③ Le crochet vaut $1 \times e^1 - 0 = e$, et la nouvelle intégrale $[e^x]_0^1 = e - 1$.

$$1 - 0 = 1$$

④ On soustrait : $e - (e - 1)$.

$$1 - 1 + 1 = 1$$

le résultat est exactement 1 — les deux e se compensent.

$$\int_0^1 x e^x dx = 1$$

4 Valeur moyenne

DÉFINITION

La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Géométriquement, c'est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ qui aurait la **même aire** que le domaine sous la courbe : on aplatit la courbe sans changer l'aire. C'est la notion qui donne un sens physique à l'intégrale — température moyenne d'une journée, vitesse moyenne d'un trajet, puissance moyenne d'un signal.

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

EXEMPLE

La température d'une journée, en degrés, est modélisée sur $[0; 12]$ par $T(t) = 10 + t$, où t est le nombre d'heures depuis 6 h. Quelle est la température moyenne sur ces douze heures ?

- ① On calcule d'abord l'intégrale, avec la primitive $10t + \frac{t^2}{2}$.
 $144 \div 2 = 72$
- ② En 12 : $10 \times 12 + 72$, et la valeur en 0 est nulle.
 $120 + 72 = 192$
- ③ On divise par la longueur de l'intervalle.
 $192 \div 12 = 16$
la moyenne vaut 16°C .
- ④ Contrôle : la fonction étant affine, la moyenne doit être celle des valeurs aux bornes.
 $\frac{10+22}{2} = 16$
 $T(0) = 10$ et $T(12) = 22$: les deux méthodes concordent.

Température moyenne de 16°C .

À VÉRIFIER

- Ai-je vérifié ma primitive **en la dérivant** ?
- Pour une primitive avec condition, ai-je déterminé la constante C ?
- Ai-je étudié le **signe de f** avant de parler d'aire ?
- Si f change de signe : ai-je découpé par la relation de Chasles ?
- En intégration par parties : u est-il bien la partie qui se **simplifie** ?
- La nouvelle intégrale est-elle plus simple que celle de départ ?

À RETENIR

- F primitive de $f \Leftrightarrow F' = f$ — à vérifier **en dérivant**.
- Toute primitive s'écrit $F + C$; une condition détermine C .
- $\int_a^b f = F(b) - F(a)$: le résultat est un **nombre**.
- Chasles : $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ — pour couper où f change de signe.
- Intégrale $\neq$ aire dès que f devient négative.
- IPP : $\int uv' = [uv] - \int u'v$; u est ce qui se **simplifie** en dérivant.
- Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ — la hauteur du rectangle équivalent.