

Limites et continuité — formes indéterminées, TVI et asymptotes

Corrigé détaillé
7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Limites en $+\infty$.

- ① a. Forme $\infty - \infty$: on factorise par x^3 , soit $x^3 \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)$.
 $2 - 0 = 2$
la parenthèse tend vers 2, donc la limite vaut $+\infty$.
- ② b. Forme $\frac{\infty}{\infty}$: rapport des termes dominants.
 $4 \div 2 = 2$
la limite vaut 2.
- ③ c. Le degré du dénominateur l'emporte.
 $2 - 1 = 1$
la limite vaut 0.

2 Formes $\frac{0}{0}$ en un point.

- ① a. Les deux membres s'annulent en 3 : forme $\frac{0}{0}$. On factorise le numérateur, différence de deux carrés.
 $3^2 = 9$
- ② Il vient $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$, puis on remplace.
 $3+3 = 6$
la limite vaut 6.
- ③ b. Le trinôme a pour racines 1 et 2, donc se factorise en $(x-1)(x-2)$.
 $1 \times 2 = 2$
- ④ Après simplification il reste $x-2$.
 $1-2 = -1$
la limite vaut -1 .

3 Croissances comparées et gendarmes.

- ① a. Forme $\frac{\infty}{\infty}$, levée par les croissances comparées : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.
 $3-3 = 0$
la limite vaut $+\infty$.
- ② b. Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.
 $1-1 = 0$
- ③ Les deux encadrants tendent vers 0.
 $0-0 = 0$
par le théorème des gendarmes, la limite vaut 0.

4 Soit $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$ sur $]1; +\infty[$.

- ① a. Le numérateur tend vers 3, le dénominateur vers 0^+ .
 $2 + 1 = 3$
la limite vaut $+\infty$: la droite $x = 1$ est asymptote verticale.
 - ② b. On développe : $(2x + 2)(x - 1) = 2x^2 - 2$, auquel on ajoute 3.
 $-2 + 3 = 1$
on retrouve bien $2x^2 + 1$ au numérateur.
 - ③ c. La différence $f(x) - (2x + 2)$ vaut $\frac{3}{x - 1}$, qui tend vers 0 en $+\infty$.
 $3 - 3 = 0$
la droite $y = 2x + 2$ est asymptote oblique.
 - ④ Sur $]1; +\infty[$, cette différence est strictement positive.
 $3 \div 1 = 3$
la courbe est au-dessus de son asymptote.
-

5 Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[0; 2]$.

- ① a. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, négative sur $[0; 1]$ et positive sur $[1; 2]$.
 $3 - 3 = 0$
 f décroît puis croît, avec un minimum en 1.
 - ② b. Sur $[1; 2]$, f est continue — c'est un polynôme — et strictement croissante.
 $1 - 3 + 1 = -1$
 $f(1) = -1 < 0$.
 - ③ Et à l'autre borne.
 $8 - 6 + 1 = 3$
 $f(2) = 3 > 0$: 0 est bien compris entre les deux valeurs.
 - ④ Le théorème des valeurs intermédiaires, avec la stricte monotonie, donne une **unique** solution α dans $[1; 2]$.
 $2 - 1 = 1$
 - ⑤ c. f change de signe entre 1,5 et 1,6.
 $1.6 - 1.5 = 0.1$
 $1,5 < \alpha < 1,6$ — l'encadrement demandé.
-

6 Vrai ou faux, en justifiant.

- ① a. Faux : cela signifie que la **forme** ne suffit pas à décider.
 $3 \div 1 = 3$
 $\frac{3x^2}{x^2}$ est de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ et tend pourtant vers 3.
 - ② b. Faux : le TVI garantit **au moins** une solution.
 $1 - 1 = 0$
sans stricte monotonie, la courbe peut couper l'axe trois fois — l'unicité vient de la monotonie, pas de la continuité.
 - ③ c. Faux, et c'est l'implication inverse qui est vraie.
 $0 - 0 = 0$
 $|x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable : la courbe y forme un angle.
-

7 Limites par composition.

- ① a. On pose $X = -2x$, qui tend vers $-\infty$.
 $0 - 2 = -2$
 $e^X \rightarrow 0$: la limite vaut 0.
- ② b. L'intérieur tend vers 3, rapport des termes dominants.
 $3 \div 1 = 3$
- ③ Puis on applique $\ln$ à cette limite.
 $3 - 3 = 0$
la limite vaut $\ln 3 \approx 1,10$.
- ④ c. On pose $X = \frac{1}{x}$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$.
 $1 \div 1 = 1$
 $e^X \rightarrow +\infty$: la limite vaut $+\infty$.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Forme indéterminée nommée puis levée	4 pts	« FI » écrit sans suite
Factorisation par le terme dominant	3 pts	Un rapport de coefficients donné sans justification
Encadrement et gendarmes correctement posés	3 pts	Un sinus traité comme s'il avait une limite
Les trois hypothèses du TVI énoncées	4 pts	La continuité tenue pour évidente et jamais écrite
Existence et unicité distinguées	3 pts	Unicité conclue du seul TVI
Asymptote justifiée par une limite	3 pts	Une asymptote lue sur le graphique