

COURS

Limites et continuité — formes indéterminées, TVI et asymptotes

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Une limite décrit ce que fait une fonction **là où on ne peut pas la calculer** : en l'infini, ou en un point qui n'est pas dans son domaine. C'est ce qui permet de dire qu'une courbe s'approche d'une droite sans jamais l'atteindre, et de démontrer qu'une équation a une solution sans savoir la résoudre. Deux résultats portent tout le chapitre : les **croissances comparées**, qui départagent les infinis, et le **théorème des valeurs intermédiaires**, qui transforme une observation graphique en démonstration.

1 Calculer une limite

RÈGLE

Les limites se calculent d'abord par **opérations** : la limite d'une somme est la somme des limites, celle d'un produit le produit des limites, et de même pour le quotient tant que le dénominateur ne tend pas vers 0. Les limites usuelles se lisent sur les courbes connues : $x^n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $\rightarrow 0$ en $-\infty$, $\ln x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $\rightarrow -\infty$ en 0^+ .

DÉFINITION

Quatre combinaisons ne permettent **aucune conclusion** à partir des seules limites des morceaux : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ et $\frac{0}{0}$. Le mot **indéterminée** ne signifie pas « pas de limite » : il signifie que la forme ne suffit pas à décider, et qu'il faut réécrire l'expression. Écrire « forme indéterminée » sans lever l'indétermination ne vaut rien ; l'écrire **puis** la lever vaut le point, car cela prouve qu'on a vu le problème.

$$\infty - \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0}$$

quatre formes, quatre gestes — aucune ne se conclut telle quelle

forme	ce qu'on fait
$\infty - \infty$	factoriser par le terme dominant
∞ / ∞	diviser haut et bas par le terme dominant
$0 \times \infty$	réécrire en quotient, ou croissances comparées
$0 / 0$	factoriser par $(x - a)$ et simplifier

« $\infty - \infty = 0$ » est faux : $x^2 - x$ tend vers $+\infty$, et $x - x^2$ vers $-\infty$

indéterminée ne veut pas dire « pas de limite » : cela veut dire « la forme ne suffit pas à décider »

Les quatre formes indéterminées, et le geste qui lève chacune.

LEVER UNE INDÉTERMINATION

- ① **Pour un polynôme ou un quotient de polynômes en $\pm\infty$** : factoriser par le terme de plus haut degré, au numérateur comme au dénominateur. Tout le reste tend alors vers 0, et il ne reste que le rapport des termes dominants.
- ② **Pour une forme $\frac{0}{0}$ en un point a** : le numérateur et le dénominateur s'annulent tous deux en a , donc tous deux se factorisent par $(x - a)$. On simplifie, et l'indétermination disparaît.
- ③ **Quand $\ln$ ou e^x affrontent une puissance** : invoquer les **croissances comparées**. L'exponentielle l'emporte sur toute puissance, qui l'emporte sur le logarithme.
 $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ et $\frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0$ en $+\infty$.
- ④ **En dernier recours** : encadrer, et appliquer le théorème des gendarmes — c'est la seule technique qui marche quand l'expression contient un sinus ou un cosinus.

EXEMPLE

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 4}$.

- ① En l'état, numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: forme $\frac{\infty}{\infty}$, indéterminée.

- ② On factorise haut et bas par x^2 , terme dominant des deux.
 $2 - 2 = 0$

- ③ Il vient $\frac{x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}$, et les x^2 se simplifient.

- ④ Chaque terme en $\frac{1}{x}$ tend vers 0 : il reste $\frac{3}{1}$.

$$3 \div 1 = 3$$

c'est le rapport des coefficients dominants — un raccourci qu'on peut citer, à condition d'avoir montré la factorisation.

La limite vaut 3.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = 0$ « puisque $\infty - \infty = 0$ ». — deux quantités qui tendent toutes deux vers $+\infty$ peuvent avoir une différence qui tend vers $+\infty$, vers $-\infty$, ou vers n'importe quel réel. Ici $x^2 - x = x(x - 1) \rightarrow +\infty$, tandis que $x - x^2 \rightarrow -\infty$: mêmes infinis, conclusions opposées.

Le réflexe : écrire « forme indéterminée » et **poursuivre**. Une factorisation par le terme dominant règle presque toujours le cas en deux lignes.

PROPRIÉTÉ

Théorème des gendarmes. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de l'infini, et si g et h ont la **même** limite ℓ , alors f tend aussi vers ℓ . C'est la seule méthode disponible pour une expression contenant un sinus ou un cosinus, dont on ne connaît pas la limite mais dont on sait qu'ils restent entre -1 et 1 . Le même énoncé avec des inégalités simples donne les théorèmes de comparaison : minorée par une fonction qui tend vers $+\infty$, une fonction y tend aussi.

$$g \leq f \leq h \text{ et } \lim g = \lim h = \ell \implies \lim f = \ell$$

EXEMPLE

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \cos x}{x}$.

- ① On ne connaît pas la limite de $\cos x$ — elle n'existe pas. Aucune opération ne s'applique : il faut encadrer.
 $1 - 1 = 0$

- ② Pour tout réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$.

- ③ On divise par $x > 0$, ce qui conserve le sens : $\frac{2x - 1}{x} \leq \frac{2x + \cos x}{x} \leq \frac{2x + 1}{x}$.
 $2 \times 1 = 2$

- ④ Les deux encadrants s'écrivent $2 - \frac{1}{x}$ et $2 + \frac{1}{x}$, et tendent tous deux vers 2.

$$2 - 0 = 2$$

le théorème des gendarmes donne la limite.

La limite vaut 2.

2 Continuité et valeurs intermédiaires

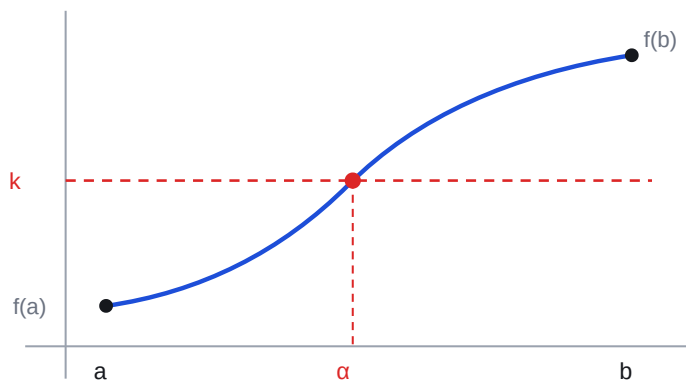
DÉFINITION

Une fonction est **continue** en a lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$: la limite existe, et elle vaut la valeur. Intuitivement, la courbe se trace sans lever le crayon. Toutes les fonctions usuelles du programme — polynômes, $\ln$, e^x , $\sin$, $\cos$, racine — sont continues sur leur ensemble de définition, ainsi que leurs sommes, produits, quotients et composées. Une fonction **dérivable** est toujours continue ; la réciproque est fautive, comme le montre $|x|$ en 0.

RÈGLE

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a ; b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a ; b]$. Si de plus f est **strictement monotone** sur cet intervalle, cette solution est **unique**. Le théorème ne donne jamais la valeur de la solution : il en démontre l'existence, ce qui suffit à répondre à la question posée, et la calculatrice fournit ensuite un encadrement.

une courbe continue qui passe de l'autre côté de la ligne l'a forcément coupée



les trois conditions

f continue sur $[a ; b]$

k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

alors $f(x) = k$ a une solution

**f strictement monotone en plus :
la solution est unique**

sans continuité, la courbe saute
par-dessus k sans la toucher

Les trois conditions du TVI, et ce que la stricte monotonie ajoute.

MONTRER QU'UNE ÉQUATION A UNE UNIQUE SOLUTION

- ① **Nommer la fonction** et l'intervalle : ramener l'équation à la forme $f(x) = k$, souvent $f(x) = 0$.
 - ② **Justifier la continuité**, en une phrase : somme, produit ou composée de fonctions continues.
 - ③ **Établir la stricte monotonie** par le signe de f' — c'est elle qui donne l'unicité, et elle seule.
 - ④ **Calculer les valeurs aux bornes** et vérifier que k est entre les deux. Un changement de signe de f suffit lorsque $k = 0$.
 - ⑤ **Conclure en citant le théorème**, puis encadrer la solution à la calculatrice si l'énoncé le demande.
- les quatre justifications comptent séparément au barème : en omettre une coûte le point même si la conclusion est juste.

EXEMPLE

Montrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution réelle, puis en donner un encadrement à l'unité.

- ① On pose $f(x) = x^3 + x - 3$, polynôme donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ② Sa dérivée $f'(x) = 3x^2 + 1$ est strictement positive : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 $0 + 1 = 1$
- ③ On évalue aux bornes d'un intervalle bien choisi.
 $1 + 1 - 3 = -1$
 $f(1) = -1 < 0$.
- ④ Puis en 2.
 $8 + 2 - 3 = 7$
 $f(2) = 7 > 0$.
- ⑤ f étant continue et strictement croissante sur $[1 ; 2]$, et 0 étant compris entre -1 et 7, le théorème donne une unique solution dans cet intervalle — et l'unicité sur $\mathbb{R}$ vient de la stricte croissance globale.
 $2 - 1 = 1$

Une unique solution α , avec $1 < \alpha < 2$.

3 Asymptotes

RÈGLE

Une **asymptote** est une droite dont la courbe se rapproche indéfiniment. Trois cas, et chacun se lit sur une limite. Si $f(x) \rightarrow \ell$ quand $x \rightarrow \pm\infty$, la droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale**. Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow a$, la droite $x = a$ est **asymptote verticale** — c'est ce qui arrive aux bornes exclues du domaine. Si $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$, la droite $y = ax + b$ est **asymptote oblique** ; le signe de cette différence dit de quel côté la courbe passe.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \implies y = ax + b \text{ asymptote oblique}$$

TROUVER UNE ASYMPTOTE OBLIQUE

- 1 **Effectuer la division** du numérateur par le dénominateur, ou vérifier une forme donnée par l'énoncé : toute fraction rationnelle dont le degré du haut dépasse d'exactement un celui du bas s'écrit $ax + b + \frac{r(x)}{q(x)}$.
- 2 **Identifier la partie affine** $ax + b$: c'est l'équation de l'asymptote, et le reste est ce qui tend vers 0.
- 3 **Vérifier la limite** : montrer que $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ en $+\infty$. C'est cette ligne qui démontre l'asymptote ; la division, seule, ne prouve rien.
- 4 **Étudier le signe du reste** pour placer la courbe : positif, elle passe au-dessus de son asymptote ; négatif, en dessous. une question sur la position relative attend exactement ce signe, et rien d'autre.

La **composition** se comporte comme on l'espère, et c'est ce qui permet d'enchaîner : si $u(x) \rightarrow b$ quand $x \rightarrow a$, et si $f(X) \rightarrow \ell$ quand $X \rightarrow b$, alors $f(u(x)) \rightarrow \ell$. On calcule donc de l'intérieur vers l'extérieur, en posant explicitement le changement de variable. Pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$: on pose $X = -x^2$, qui tend vers $-\infty$, et e^X tend alors vers 0. Écrire le changement de variable coûte une ligne et évite la moitié des erreurs de signe.

À VÉRIFIER

- Ai-je **nommé** la forme indéterminée avant de la lever ?
- Ai-je factorisé par le **terme dominant**, et non simplifié à vue ?
- Pour une forme $\frac{0}{0}$, ai-je factorisé par $(x - a)$ des deux côtés ?
- Pour le TVI : continuité, monotonie, valeurs aux bornes — les trois sont-elles écrites ?
- Ai-je bien distingué **existence** (TVI) et **unicité** (stricte monotonie) ?
- Chaque asymptote est-elle justifiée par une **limite**, et non par l'allure de la courbe ?

À RETENIR

- Quatre formes indéterminées : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$.
- Polynômes en $\pm\infty$: **factoriser par le terme dominant**.
- Forme $\frac{0}{0}$ en a : les deux membres se factorisent par $(x - a)$.
- Croissances comparées : e^x > toute puissance > $\ln x$.
- Gendarmes : $g \leq f \leq h$ et $\lim g = \lim h = \ell$ donne $\lim f = \ell$.
- TVI : continuité + k entre $f(a)$ et $f(b) \implies$ existence ; monotonie stricte $\implies$ unicité.
- Asymptote : toujours justifiée par une limite, jamais par l'allure.