

CORRIGÉ

Fonction logarithme népérien — propriétés, équations et croissances comparées

Tle

Corrigé détaillé
7 exercices

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Simplifier, et donner la forme demandée.

- ① a. Une différence de logarithmes est le logarithme du quotient.
 $6 \div 3 = 2$
 $\ln 2$.
- ② b. $9 = 3^2$ et $4 = 2^2$, et la somme devient celle des deux puissances.
 $3^2 = 9$
 $2 \ln 3 + 2 \ln 2$.
- ③ c. L'inverse change le signe, et l'exposant descend.
 $0 - 3 = -3$
 $-3 \ln e = -3$.

2 Ensemble de définition. Donner celui de chaque fonction, en justifiant.

- ① a. Il faut $x - 5 > 0$.
 $5 + 0 = 5$
 $D_f =]5 ; +\infty[$.
- ② b. Un carré est positif ou nul, donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel.
 $0 + 1 = 1$
 $D_g = \mathbb{R}$: la condition est ici toujours remplie, ce qui ne dispense pas de le dire.
- ③ c. Deux conditions simultanées : $3 - x > 0$ et $x > 0$.
 $3 - 0 = 3$
- ④ On prend l'intersection des deux intervalles.
 $3 - 3 = 0$
 $D_h =]0 ; 3[$ — c'est l'intersection qu'on oublie, pas chacune des conditions.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, condition d'existence comprise.

- ① a. Condition : $x > 0$. On revient à l'exponentielle.
 $2 - 2 = 0$
 $x = e^2 \approx 7,39$, bien positif.
- ② b. Conditions : $2x - 6 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $x > 3$.
 $6 \div 2 = 3$
- ③ La croissance stricte permet d'égaliser les contenus : $2x - 6 = x + 1$.
 $6 + 1 = 7$
 $x = 7$, et $7 > 3$: la solution est recevable.
- ④ c. Condition : $x > 3$. Or $\ln A = 0$ équivaut à $A = 1$.
 $3 + 1 = 4$
 $x = 4$, recevable.

4 Résoudre les inéquations.

- ① a. Condition : $x > 0$. La fonction étant croissante, l'inégalité se transporte.
 $1 - 1 = 0$
 $0 < x < e$, soit $S =]0 ; e[$.
- ② b. Conditions : $x > -2$ et $3x - 4 > 0$, donc $x > \frac{4}{3}$.
 $4 \div 3 = 1.3333333333333333$
- ③ On compare les contenus, sans changer le sens : $x + 2 \geq 3x - 4$.
 $2 + 4 = 6$
- ④ D'où $6 \geq 2x$.
 $6 \div 2 = 3$
 $x \leq 3$, et avec la condition : $S = \left] \frac{4}{3} ; 3 \right]$.
-

5 L'inconnue en exposant.

- ① a. On cherche le plus petit entier n tel que $1000 \times 1,05^n > 2000$, soit $1,05^n > 2$.
 $2000 \div 1000 = 2$
- ② On passe au logarithme : $n \ln 1,05 > \ln 2$, et $\ln 1,05 > 0$ donc le sens est conservé.
 $n > \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$.
- ③ Le premier entier qui convient est donc 15.
 $14 + 1 = 15$
- ④ Contrôle à la calculatrice.
 $1.05^{15} = 2.0789281794113685$
 $1,05^{15} \approx 2,08 > 2$ et $1,05^{14} \approx 1,98 < 2$: c'est bien la quinzième année.
- ⑤ b. L'inconnue est en **exposant** : aucune opération algébrique ne l'en fait descendre.
seul le logarithme transforme une puissance en produit, donc un exposant en facteur.
-

6 Dérivée et variations.

- ① a. La dérivée de $\ln$ est $\frac{1}{x}$.
 $1 - 1 = 0$
 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.
- ② b. On réduit au même dénominateur : $f'(x) = \frac{x-1}{x}$, de dénominateur positif.
 $1 - 1 = 0$
 f' a donc le signe de $x - 1$: négative avant 1, positive après.
- ③ f décroît sur $]0 ; 1]$ puis croît sur $[1 ; +\infty[$: elle atteint son minimum en 1.
 $1 - 0 = 1$
 $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$.
- ④ c. Le minimum de f vaut 1, donc $x - \ln x \geq 1$ pour tout $x > 0$.
 $1 - 1 = 0$
en réarrangeant : $\ln x \leq x - 1$, avec égalité seulement en $x = 1$.
-

7 Croissances comparées.

- ① a. On écrit $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$, produit de deux facteurs tendant vers 0.
 $0 \times 0 = 0$
la limite vaut 0.
- ② b. Forme indéterminée $\infty - \infty$: on factorise par x , soit $x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$.
 $1 - 0 = 1$
- ③ La parenthèse tend vers 1 et x vers $+\infty$.
 $1 \times 1 = 1$
la limite vaut $+\infty$: x l'emporte, comme annoncé.
- ④ c. On écrit $x^2 \ln x = x \times (x \ln x)$, et $x \ln x$ tend vers 0.
 $0 \times 0 = 0$
la limite vaut 0.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Condition d'existence posée d'emblée	4 pts	Une solution négative gardée sous un logarithme
Propriétés algébriques appliquées à bon escient	4 pts	$\ln(a + b)$ décomposé en $\ln a + \ln b$
Retour à l'exponentielle ou égalité des contenus	3 pts	Une équation $\ln A = k$ laissée en l'état
Sens de l'inégalité conservé	2 pts	Un sens retourné sans raison
Passage au logarithme pour un exposant	4 pts	Un seuil cherché à tâtons, sans justification
Croissances comparées invoquées et nommées	3 pts	Une forme indéterminée laissée sans levée