

COURS

Fonction logarithme népérien — propriétés, équations et croissances comparées

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

Le logarithme népérien répond à une question simple : **à quelle puissance faut-il élever e pour obtenir ce nombre ?** De cette définition découle tout le chapitre, et notamment la propriété qui a fait sa fortune historique — il **transforme les produits en sommes**. Avant les calculatrices, c'est ce qui permettait de multiplier des nombres à sept chiffres ; aujourd'hui, c'est ce qui permet de résoudre une équation où l'inconnue est en exposant, ce qu'aucun autre outil du programme ne sait faire.

1 Définition et premières propriétés

DÉFINITION

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est définie sur $]0 ; +\infty[$ comme la **fonction réciproque** de l'exponentielle : $\ln x = y$ signifie exactement $e^y = x$. C'est aussi l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule en 1 — les deux définitions décrivent la même fonction, et la seconde explique pourquoi sa dérivée est si simple. Elle n'existe **pas** pour $x \leq 0$: aucune puissance de e ne donne un nombre négatif.

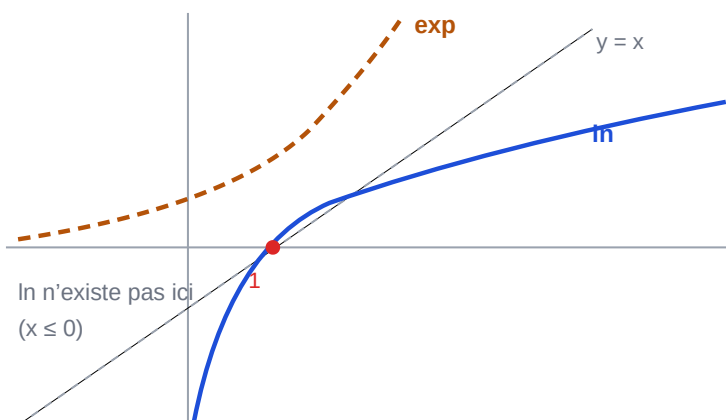
$$\ln x = y \iff e^y = x \quad (x > 0)$$

PROPRIÉTÉ

Trois valeurs et un signe suffisent à contrôler tout calcul. $\ln 1 = 0$, puisque $e^0 = 1$; $\ln e = 1$; et la fonction est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$, de dérivée $\frac{1}{x}$, positive. Il en résulte que $\ln x > 0$ exactement quand $x > 1$, et $\ln x < 0$ quand $0 < x < 1$. La croissance est stricte, donc $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$: c'est ce qui autorise à « simplifier par $\ln$ » des deux côtés d'une équation.

$$\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1 \quad ; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$\ln$ et $\exp$ sont réciproques : leurs courbes se répondent dans le miroir $y = x$



ce que la courbe dit

domaine $]0 ; +\infty[$

strictement croissante

$\ln 1 = 0 \cdot \ln e = 1$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

limite $-\infty$ en 0, $+\infty$ en $+\infty$

mais très lentement : $\ln 1000 \approx 6,9$

La courbe de $\ln$, et sa symétrie avec celle de l'exponentielle.

2 Les propriétés algébriques

RÈGLE

Le logarithme **abaisse d'un cran** chaque opération : le produit devient une somme, le quotient une différence, la puissance un produit. Ces trois règles ne valent que pour des nombres **strictement positifs**, et c'est la première chose à vérifier avant de les appliquer. Deux cas particuliers en découlent sans rien de neuf : $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, qui est la règle de la puissance avec $n = -1$, et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$, la même avec $n = \frac{1}{2}$.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad ; \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

le logarithme abaisse d'un cran : produit $\rightarrow$ somme, puissance $\rightarrow$ produit

ce qu'on écrit

$$\ln(a \times b)$$

$$\ln(a / b)$$

$$\ln(a^n)$$

a et b strictement positifs, toujours

ce que ça devient

$$\ln a + \ln b$$

$$\ln a - \ln b$$

$$n \times \ln a$$

$\ln(a + b)$ ne se simplifie pas

cas dérivés : $\ln(1/a) = -\ln a$ · $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$ — ce sont les mêmes règles, avec $n = -1$ et $n = \frac{1}{2}$

Les trois règles, et la somme qui ne se simplifie pas.

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$. — la règle transforme un **produit** en somme, jamais une somme en somme. Un contre-exemple le montre en deux calculs : $\ln(1 + 1) = \ln 2 \approx 0,69$, alors que $\ln 1 + \ln 1 = 0$. Une somme à l'intérieur d'un logarithme ne se décompose pas — il faut d'abord la **factoriser** si on veut avancer.

Le réflexe : regarder ce qui sépare a et b à l'intérieur de la parenthèse. Si c'est un +, aucune règle ne s'applique tant qu'on n'a pas factorisé.

EXEMPLE

Écrire $A = \ln 8 - 2 \ln 4 + \ln 32$ sous la forme $k \ln 2$.

① On exprime chaque nombre comme une puissance de 2.

$$2^3 = 8$$

② De même pour 4 et 32.

$$2^5 = 32$$

$$4 = 2^2 \text{ et } 32 = 2^5.$$

③ La règle de la puissance donne $A = 3 \ln 2 - 2 \times 2 \ln 2 + 5 \ln 2$.

$$2 \times 2 = 4$$

④ On additionne les coefficients.

$$3 - 4 + 5 = 4$$

$$\underline{A = 4 \ln 2}$$

3 Équations et inéquations

RÉSOLUDRE UNE ÉQUATION AVEC UN LOGARITHME

① **Poser la condition d'existence** avant tout : chaque expression sous un $\ln$ doit être strictement positive. Cette condition définit l'intervalle dans lequel on cherchera, et elle se pose **d'abord**, pas à la fin pour vérifier.

② **Rassembler en un seul logarithme** de chaque côté, avec les trois règles. Une équation $\ln A = \ln B$ se ramène alors à $A = B$, la fonction étant strictement croissante.

③ **Ou revenir à l'exponentielle** quand un seul membre porte un $\ln$: $\ln x = k$ équivaut à $x = e^k$.

④ **Confronter les solutions à la condition d'existence** et écarter celles qui n'y satisfont pas.

c'est l'étape que les copies sautent, et elle fait perdre des points même quand le calcul est juste : une solution négative peut apparaître, elle n'est pas recevable.

⑤ **Pour une inéquation**, le sens ne change jamais : $\ln A < \ln B$ équivaut à $A < B$, parce que $\ln$ est croissante. C'est le seul point où elle est plus commode que les inéquations du second degré.

EXEMPLE

Une population double chaque année. Au bout de combien d'années aura-t-elle été multipliée par plus de 1 000 ?

① On cherche le plus petit entier n tel que $2^n > 1000$.

$$2^9 = 512$$

② On passe au logarithme, ce qui fait descendre l'exposant : $n \ln 2 > \ln 1000$.

$\ln$ étant croissante, l'inégalité garde son sens.

③ D'où $n > \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9,97$: le premier entier qui convient est 10.

$$9 + 1 = 10$$

④ On vérifie des deux côtés.

$$2^{10} = 1024$$

$$2^{10} = 1024 > 1000 \text{ et } 2^9 = 512 < 1000 : \text{c'est bien le premier rang.}$$

Au bout de 10 ans.

4 Croissances comparées

PROPRIÉTÉ

Le logarithme tend vers $+\infty$, mais **moins vite que n'importe quelle puissance de x** . C'est ce que disent les limites de croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$. Elles lèvent les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$ où $\ln$ apparaît, et la règle se retient en une phrase : **dans un affrontement entre $\ln$ et une puissance, la puissance gagne toujours.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

La lenteur du logarithme n'est pas une image : $\ln 1000 \approx 6,9$, et $\ln$ d'un milliard vaut à peine 20,7. C'est précisément ce qui le rend utile pour représenter des grandeurs qui s'étalent sur plusieurs ordres — magnitudes des séismes, décibels, pH. Une échelle logarithmique transforme des multiplications par dix en pas réguliers, et rend lisible sur une même feuille ce qui va de 1 à un million.

À VÉRIFIER

- Ai-je posé la **condition d'existence** avant de calculer, et non après ?
- Ai-je vérifié que chaque solution la respecte ?
- Ai-je bien laissé $\ln(a + b)$ **tel quel**, faute de règle applicable ?
- Pour une inéquation : ai-je gardé le sens, $\ln$ étant croissante ?
- Pour une inconnue en exposant, ai-je pensé à passer au logarithme ?
- Dans une forme indéterminée avec $\ln$, ai-je invoqué les **croissances comparées** ?

À RETENIR

- $\ln x = y \iff e^y = x$, et $\ln$ n'existe que pour $x > 0$.
- $\ln 1 = 0 \cdot \ln e = 1 \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b \cdot \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \cdot \ln(a^n) = n \ln a$.
- $\ln(a + b)$ **ne se simplifie pas** — il faut factoriser d'abord.
- Condition d'existence **avant** le calcul, vérification des solutions **après**.
- $\ln$ étant croissante : $\ln A < \ln B \iff A < B$, sans changement de sens.
- Croissances comparées : la puissance l'emporte toujours sur $\ln$.