CORRIGÉ

Tle

Corrigé détaillé
8 exercices

Loi binomiale — Épreuves indépendantes et Bernoulli

Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Dans chaque cas, dire si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui, donner ses paramètres ; sinon, dire quelle condition manque.

1. **a.** Oui : 8 épreuves identiques et indépendantes, de succès « obtenir 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$; X suit $\mathcal{B}\left(8\,;\frac{1}{6}\right)$.
2. **b.** Oui : avec remise, les 20 tirages sont identiques et indépendants, de succès « rouge », de probabilité $\frac{4}{10}$; X suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}4)$.
3. **c.** Non : sans remise, les tirages ne sont pas indépendants. Au deuxième tirage, la probabilité de tirer une rouge vaut $\frac{3}{9}$ ou $\frac{4}{9}$ selon le premier.
4. **d.** Non : le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance, et X ne compte pas des succès.
5. **e.** Oui, en prenant pour succès « manquer la cible », de probabilité :
   $1-0{,}7=0{,}3$
   les 12 tirs sont indépendants : X suit $\mathcal{B}(12\,;0{,}3)$.
6. Conclusion : seules les situations a, b et e relèvent d'un schéma de Bernoulli, donc d'une loi binomiale.

2 La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0{,}2)$. Donner les résultats sous forme décimale exacte.

1. **a.** $P(X=0)=\binom{5}{0}\times 0{,}2^0\times 0{,}8^5$, avec $\binom{5}{0}=1$:
   $0{,}8^5=0{,}32768$
2. Avec $\binom{5}{2}=10$:
   $P(X=2)=10\times 0{,}2^2\times 0{,}8^3=10\times 0{,}04\times 0{,}512=0{,}2048$
3. **b.** $\{X\geqslant 1\}$ est le contraire de $\{X=0\}$:
   $1-0{,}32768=0{,}67232$
4. **c.** $P(X=1)=5\times 0{,}2\times 0{,}8^4=0{,}4096$, donc :
   $P(X\leqslant 1)=0{,}32768+0{,}4096=0{,}73728$
5. $P(X=3)=10\times 0{,}2^3\times 0{,}8^2=0{,}0512$, et :
   $P(1\leqslant X\leqslant 3)=0{,}4096+0{,}2048+0{,}0512=0{,}6656$
6. Conclusion : $P(X=0)=0{,}32768$, $P(X=2)=0{,}2048$, $P(X\geqslant 1)=0{,}67232$, $P(X\leqslant 1)=0{,}73728$ et $P(1\leqslant X\leqslant 3)=0{,}6656$.

3 Chaque matin, Léa prend le bus avec la probabilité 0,7, et sinon son vélo. En bus, elle arrive en retard avec la probabilité 0,1 ; à vélo, avec la probabilité 0,05. On note B « Léa prend le bus » et R « Léa est en retard ».

1. **a.** Premier niveau : B (0,7) et $\overline{B}$ (0,3). Second niveau : après B, R (0,1) et $\overline{R}$ (0,9) ; après $\overline{B}$, R (0,05) et $\overline{R}$ (0,95). Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.
2. **b.** Formule des probabilités totales, avec la partition B, $\overline{B}$:
   $P(R)=0{,}7\times 0{,}1+0{,}3\times 0{,}05=0{,}07+0{,}015=0{,}085$
3. **c.** On cherche $P_R(B)=\dfrac{P(B\cap R)}{P(R)}$:
   $\frac{0{,}07}{0{,}085}=\frac{14}{17}\approx 0{,}82$
4. **d.** Chaque jour est une épreuve de Bernoulli de succès « retard », $p=0{,}085$, répétée 5 fois de façon indépendante : Y suit $\mathcal{B}(5\,;0{,}085)$. Au moins un retard :
   $P(Y\geqslant 1)=1-0{,}915^5\approx 0{,}36$
5. Conclusion : $P(R)=0{,}085$, $P_R(B)\approx 0{,}82$, et Léa a environ 36 % de risque d'être en retard au moins une fois en 5 jours.

4 **Repérer l'erreur. On lance 6 fois une pièce équilibrée ; le nombre X de « pile » suit $\mathcal{B}(6\,;0{,}5)$. Pour chaque affirmation d'un élève, expliquer l'erreur et corriger.**

1. **a.** $0{,}5^2 \times 0{,}5^4$ est la probabilité d'**un** chemin à deux « pile ». Il y en a $\binom{6}{2} = 15$:
   $15 \times 0{,}5^6 = \frac{15}{64}$
2. **b.** Le contraire de $\{X \geqslant 2\}$ est $\{X \leqslant 1\}$: l'élève retire à tort la valeur 2. Avec $P(X=0) = \dfrac{1}{64}$ et $P(X=1) = \dfrac{6}{64}$:
   $P(X \geqslant 2) = 1 - \frac{1+6}{64} = \frac{57}{64}$
3. **c.** Une probabilité ne se lit pas sur le milieu des valeurs. Avec $\binom{6}{3} = 20$:
   $P(X=3) = 20 \times 0{,}5^6 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$
4. Conclusion : $P(X=2) = \dfrac{15}{64}$, $P(X \geqslant 2) = \dfrac{57}{64}$ et $P(X=3) = \dfrac{5}{16} = 0{,}3125$: obtenir exactement 3 « pile » arrive moins d'une fois sur trois.

---

5 **Deux paris. Pari A : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé équilibré. Pari B : obtenir au moins un double six en lançant 24 fois deux dés équilibrés. Les lancers sont indépendants.**

1. **a.** Le nombre de 6 suit $\mathcal{B}\left(4\,;\dfrac{1}{6}\right)$; on gagne s'il vaut au moins 1 :
   $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$
2. **b.** Deux dés donnent un double six avec la probabilité $\dfrac{1}{36}$; le nombre de doubles six suit $\mathcal{B}\left(24\,;\dfrac{1}{36}\right)$:
   $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}491$
3. Le pari A est gagné plus d'une fois sur deux, le pari B moins d'une fois sur deux : A est plus avantageux.
4. **c.** On cherche le plus petit n tel que $\left(\dfrac{35}{36}\right)^n < 0{,}5$, soit $n \ln\dfrac{35}{36} < \ln 0{,}5$. Comme $\ln\dfrac{35}{36} < 0$, on divise en changeant le sens :
   $n > \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{35}{36}} \approx 24{,}6$
5. Contrôle : $1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{25} \approx 0{,}506$, alors que la valeur pour 24 lancers est 0,491. Conclusion : il faut au moins 25 lancers.

---

6 **Surréservation. Un avion compte 100 places. Chaque personne ayant acheté un billet se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,92, indépendamment des autres. La compagnie vend 105 billets ; X est le nombre de personnes qui se présentent. Valeurs de $P(X \leqslant k)$ arrondies au dix-millième : 0,7440 pour $k = 98$; 0,8537 pour 99 ; 0,9294 pour 100 ; 0,9725 pour 101 ; 0,9919 pour 102.**

1. **a.** Chaque billet donne une épreuve de Bernoulli de succès « la personne se présente », de probabilité 0,92 ; les 105 épreuves sont identiques et indépendantes, et X compte les succès : X suit $\mathcal{B}(105\,;0{,}92)$.
2. **b.** On refuse quelqu'un si plus de 100 personnes se présentent :
   $P(X > 100) = 1 - P(X \leqslant 100) \approx 1 - 0{,}9294 = 0{,}0706$
3. **c.** $P(X > 100) \approx 0{,}0706 > 0{,}05$, tandis que :
   $P(X > 101) \approx 1 - 0{,}9725 = 0{,}0275$
   $0{,}0275 \leqslant 0{,}05$, et pour $k \leqslant 100$, $P(X > k) \geqslant P(X > 100) > 0{,}05$: le plus petit entier est $k = 101$, valeur que renvoie `seuil(105, 0.92, 0.05)`.
4. Interprétation : avec une probabilité d'au moins 0,95, au plus 101 personnes se présentent ; ce seuil dépasse les 100 places.
5. **d.** Avec 105 billets, le risque vaut environ $0{,}071 > 0{,}05$: c'est non. Avec 104 billets, il vaut environ $0{,}029 \leqslant 0{,}05$: c'est possible.
6. Conclusion : la compagnie peut vendre 104 billets, mais pas 105.

---

7 **Algorithmique. On reprend les fonctions `bernoulli`, `binomiale` et `echantillon` du cours. Sur une planche de Galton à n rangées de clous, la bille part à droite avec la probabilité 0,5 à chaque clou ; sa case, numérotée de 0 à n, est le nombre de rebonds à droite.**

1. **a.** Chaque clou est une épreuve de Bernoulli (succès : « droite », probabilité 0,5) et les rebonds sont indépendants. `binomiale(4, 0.5)` additionne 4 appels de `bernoulli(0.5)` : elle compte les rebonds à droite. La case suit $\mathcal{B}(4\,;0{,}5)$.
2. **b.** Avec $\binom{4}{2} = 6$ chemins :
$6 \times 0{,}5^4 = \frac{6}{16} = 0{,}375$
3. **c.** `L.count(2)` est le nombre de billes, sur 1 000, tombées en case 2 : il est proche de $1000 \times 0{,}375 = 375$. Chaque exécution tire de nouveaux nombres au hasard : l'échantillon, donc le compte, varie.
4. **d.** `def frequences(L, n):` puis `return [L.count(k) / len(L) for k in range(n + 1)]`. Pour $n = 4$, les fréquences sont proches de $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$ et $\frac{1}{16}$.
5. Conclusion : la case suit $\mathcal{B}(4\,;0{,}5)$; la simulation retrouve approximativement ses probabilités, sans jamais les donner exactement.

---

8 **Optimiser une probabilité. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Pour $p \in [0\,;1]$, X suit $\mathcal{B}(n,p)$, et l'on pose $f(p) = P(X=1)$.**

1. **a.** Avec $\binom{n}{1} = n$: $f(p) = n\,p^1(1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}$.
2. **b.** $f = u \times v$ avec $u(p) = np$ et $v(p) = (1-p)^{n-1}$, de dérivée $v'(p) = -(n-1)(1-p)^{n-2}$. Donc $f'(p) = n(1-p)^{n-1} - n(n-1)p(1-p)^{n-2}$.
3. On factorise par $n(1-p)^{n-2}$: $f'(p) = n(1-p)^{n-2}\big[(1-p) - (n-1)p\big] = n(1-p)^{n-2}(1-np)$.
4. **c.** Sur $[0\,;1[$, $n(1-p)^{n-2} > 0$: $f'(p)$ a le signe de $1-np$, positif avant $\frac{1}{n}$ et négatif après. f croît sur $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ puis décroît sur $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$: son maximum, atteint en $p = \frac{1}{n}$, vaut $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
5. **d.** Ici $n = 10$: le maximum est atteint pour $p = 0{,}1$, et il vaut :
$10 \times 0{,}1 \times 0{,}9^9 = 0{,}9^9 \approx 0{,}387$
6. Conclusion : la probabilité d'exactement un succès est maximale pour $p = \frac{1}{n}$; pour un lot de 10 pièces, c'est un taux de défaut de 10 %, et elle vaut alors environ 0,387.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Justifier un schéma de Bernoulli et une loi binomiale, paramètres compris	4 pts	« X suit une loi binomiale » sans les conditions ; n ou p absents ; une loi binomiale appliquée à des tirages sans remise
Arbre pondéré et formule des probabilités totales	3 pts	Des pondérations du second niveau qui ne sont pas conditionnelles ; un chemin oublié dans la somme
Calculer $P(X=k)$	4 pts	Le coefficient $\binom{n}{k}$ oublié ; les exposants k et $n-k$ échangés
$P(X \leqslant k)$, $P(X \geqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$	4 pts	$P(X \geqslant k)$ calculé par $1 - P(X \leqslant k)$; une borne d'intervalle décalée d'une unité
Résoudre un problème de seuil, de comparaison ou d'optimisation	3 pts	L'inégalité non retournée après division par un logarithme négatif ; une conclusion sans entier ou sans phrase
Simuler et lire un algorithme	2 pts	Confondre une fréquence simulée et une probabilité ; une boucle qui cumule mal $P(X \leqslant k)$