EXERCICES

Loi binomiale — Épreuves indépendantes et Bernoulli

Tle

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Dans chaque cas, dire si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Si oui, donner ses paramètres ; sinon, dire quelle condition manque. ●○○

a. On lance 8 fois un dé équilibré ; X est le nombre de 6 obtenus.

b. Une urne contient 4 boules rouges et 6 noires. On tire 20 fois une boule, en la remettant après chaque tirage ; X est le nombre de boules rouges.

c. Dans la même urne, on tire successivement 3 boules **sans remise** ; X est le nombre de boules rouges.

d. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile » ; X est le nombre de lancers effectués.

e. Un tireur atteint la cible avec la probabilité 0,7 à chaque tir, indépendamment des autres. Il tire 12 fois ; X est le nombre de tirs **manqués**.

2 La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5\,;0{,}2)$. Donner les résultats sous forme décimale exacte. ●○○

a. Calculer $P(X=0)$ et $P(X=2)$.

b. En déduire $P(X \geqslant 1)$.

c. Calculer $P(X \leqslant 1)$ et $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.

3 **Chaque matin, Léa prend le bus avec la probabilité 0,7, et sinon son vélo. En bus, elle arrive en retard avec la probabilité 0,1 ; à vélo, avec la probabilité 0,05. On note B « Léa prend le bus » et R « Léa est en retard ».** ●●○

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer $P(R)$.

c. Léa est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait pris le bus ? Arrondir au centième.

d. On admet que les retards des différents jours sont indépendants. Sur 5 jours, Y est le nombre de retards. Donner la loi de Y, puis la probabilité que Léa soit en retard au moins une fois, arrondie au centième.

4 **Repérer l'erreur. On lance 6 fois une pièce équilibrée ; le nombre X de « pile » suit $\mathcal{B}(6\,;0{,}5)$. Pour chaque affirmation d'un élève, expliquer l'erreur et corriger.** ●●○

a. « $P(X=2) = 0{,}5^2 \times 0{,}5^4 = \dfrac{1}{64}$. »

b. « $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2)$. »

c. « $P(X=3) = \dfrac{1}{2}$, puisque 3 est la moitié de 6. »

5 **Deux paris. Pari A : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois un dé équilibré. Pari B : obtenir au moins un double six en lançant 24 fois deux dés équilibrés. Les lancers sont indépendants.** ●●○

a. Calculer la probabilité de gagner le pari A, arrondie au millième.

b. Même question pour le pari B. Quel pari est le plus avantageux ?

c. Combien de lancers de deux dés faut-il, au minimum, pour que la probabilité d'obtenir au moins un double six dépasse 0,5 ?

6 **Surréservation. Un avion compte 100 places. Chaque personne ayant acheté un billet se présente à l'embarquement avec la probabilité 0,92, indépendamment des autres. La compagnie vend 105 billets ; X est le nombre de personnes qui se présentent. Valeurs de $P(X \leqslant k)$ arrondies au dix-millième : 0,7440 pour $k = 98$; 0,8537 pour 99 ; 0,9294 pour 100 ; 0,9725 pour 101 ; 0,9919 pour 102.** ●●●

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité qu'au moins une personne se présente sans pouvoir embarquer.

c. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X > k) \leqslant 0{,}05$. Interpréter.

d. Pour 104 billets vendus, on admet que $P(X > 100) \approx 0{,}029$. La compagnie veut un risque d'au plus 5 % de refuser quelqu'un. Peut-elle vendre 105 billets ? Et 104 ?

7 **Algorithmique. On reprend les fonctions `bernoulli`, `binomiale` et `echantillon` du cours. Sur une planche de Galton à n rangées de clous, la bille part à droite avec la probabilité 0,5 à chaque clou ; sa case, numérotée de 0 à n, est le nombre de rebonds à droite.** ●●●

a. Expliquer pourquoi `binomiale(4, 0.5)` simule la case d'une bille sur une planche à 4 rangées. Quelle est la loi de cette case ?

b. Calculer la probabilité qu'une bille tombe dans la case 2.

c. On exécute `L = echantillon(1000, 4, 0.5)`, puis `L.count(2)`. Autour de quelle valeur est le résultat ? Pourquoi change-t-il d'une exécution à l'autre ?

d. Écrire une fonction `frequences(L, n)` qui renvoie la liste des fréquences des cases 0 à n dans la liste `L`.

8 **Optimiser une probabilité. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Pour $p \in [0\,;1]$, X suit $\mathcal{B}(n, p)$, et l'on pose $f(p) = P(X = 1)$.** ●●●

a. Montrer que $f(p) = np(1-p)^{n-1}$.

b. Montrer que, pour tout $p \in [0\,;1]$, $f'(p) = n(1-p)^{n-2}(1-np)$.

c. En déduire la valeur de p pour laquelle la probabilité d'obtenir exactement un succès est maximale, et ce maximum.

d. Application : dans un lot de 10 pièces, chacune est défectueuse avec la probabilité p, indépendamment des autres. Pour quelle valeur de p la probabilité d'avoir exactement une pièce défectueuse est-elle maximale ? Donner ce maximum au millième.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Loi binomiale — Épreuves indépendantes et Bernoulli ».