CORRIGÉ

Bienaymé-Tchebychev — Concentration, loi des grands nombres

Tle

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Appliquer l'inégalité. Une variable aléatoire X a pour espérance 50 et pour écart type 4.

1 **a.** $V = 4^2 = 16$. Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 10$:
$\dfrac{16}{10^2} = 0{,}16$
donc $P(|X - 50| \geqslant 10) \leqslant 0{,}16$.

2 **b.** $\{40 < X < 60\} = \{|X - 50| < 10\}$, contraire de l'événement du a :
$1 - 0{,}16 = 0{,}84$
donc $P(40 < X < 60) \geqslant 0{,}84$.

3 **c.** $12 = 3 \times 4 = 3\sigma$, donc la borne vaut $\dfrac{1}{3^2}$:
$\dfrac{16}{12^2} = \dfrac{1}{9} \approx 0{,}111$
donc $P(|X - 50| \geqslant 12) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

4 **d.** La borne vaut $\dfrac{16}{9} > 1$: l'inégalité est vraie mais n'apprend rien, puisqu'une probabilité est toujours au plus 1. Un écart de 3, inférieur à $\sigma = 4$, n'a rien d'improbable.

---

2 Loi binomiale. S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0{,}2)$.

1 **a.** $E(S) = 400 \times 0{,}2 = 80$, puis :
$V(S) = 400 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 64$
et $\sigma(S) = 8$.

2 **b.** Avec $\delta = 16 = 2\sigma$:
$\dfrac{64}{16^2} = 0{,}25$
donc $P(|S - 80| \geqslant 16) \leqslant 0{,}25$, quand la valeur exacte est environ 0,0524 : la borne est environ cinq fois trop large.

3 **c.** S est entier : $65 \leqslant S \leqslant 95 \iff |S - 80| \leqslant 15 \iff |S - 80| < 16$. Par le contraire du b :
$1 - 0{,}25 = 0{,}75$
donc $P(65 \leqslant S \leqslant 95) \geqslant 0{,}75$.

4 **d.** $[60\,;90]$ n'est pas centré en 80. Il contient $[70\,;90]$, et $70 \leqslant S \leqslant 90 \iff |S - 80| < 11$:
$1 - \dfrac{64}{11^2} = \dfrac{57}{121} \approx 0{,}471$
or $\{70 \leqslant S \leqslant 90\} \subset \{60 \leqslant S \leqslant 90\}$, donc $P(60 \leqslant S \leqslant 90) \geqslant \dfrac{57}{121}$, soit environ 0,47.

---

3 **Repérer l'erreur. Une variable aléatoire X a pour espérance 12 et pour écart type 3. On cherche une taille n d'échantillon telle que $P(|M_n - 12| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}1$. Lucas écrit : « $V = 3$, donc il faut $\dfrac{3}{n \times 0{,}5^2} \leqslant 0{,}1$, soit $n \leqslant \dfrac{3}{0{,}1 \times 0{,}5^2} = 120$. Il faut donc prendre $n = 120$. »**

1. **a.** Première erreur : la variance est $V = \sigma^2 = 9$, pas 3. Deuxième : n est au dénominateur, donc l'inégalité donne $n \geqslant \ldots$ et non $n \leqslant \ldots$. Troisième : l'inégalité donne une condition **suffisante** ; on ne peut pas écrire « il faut ».

2. **b.** Par l'inégalité de concentration, $P(|M_n - 12| \geqslant 0{,}5) \leqslant \dfrac{9}{n \times 0{,}5^2}$. Il suffit que cette borne soit au plus 0,1, c'est-à-dire $n \geqslant \dfrac{9}{0{,}1 \times 0{,}5^2}$:

$$\frac{9}{0{,}1 \times 0{,}5^2} = 360$$

3. Contrôle : $\dfrac{9}{360 \times 0{,}25} = 0{,}1$. Conclusion : un échantillon de taille 360 suffit.

$$\frac{9}{360 \times 0{,}25} = 0{,}1$$

---

4 **Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.**

1. **a. Vrai.** $\{6 < X < 14\} = \{|X - 10| < 4\}$ et $P(|X - 10| \geqslant 4) \leqslant \dfrac{4}{16}$:

$$1 - \frac{4}{16} = 0{,}75$$

2. **b. Faux.** L'inégalité donne seulement $P(|X - 10| \geqslant 4) \leqslant 0{,}25$: une majoration, pas une valeur. Si X vaut 10 avec la probabilité 0,96, et 0 ou 20 avec la probabilité 0,02 chacun, alors $V(X) = 4$ et la probabilité vaut 0,04.

$$100 \times 0{,}02 + 100 \times 0{,}02 = 4$$

3. **c. Vrai.** La borne vaut $\dfrac{1}{3^2}$, et :

$$\frac{1}{9} \approx 0{,}111$$

or $0{,}111 \leqslant 0{,}12$.

4. **d. Faux.** $V(S_n) = nV$ par additivité, et $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\, V(S_n) = \dfrac{V}{n}$.

5. **e. Faux.** Les lancers sont indépendants : la probabilité de face reste $\dfrac{1}{2}$. La loi des grands nombres porte sur la fréquence quand n grandit, pas sur le lancer suivant.

6. **f. Vrai.** $\sigma(M_{4n}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \dfrac{\sigma}{2\sqrt{n}}$, la moitié de $\sigma(M_n)$: c'est le facteur $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

---

5 **Contrôle de qualité. Une usine fabrique des composants, dont une proportion p inconnue est défectueuse. On prélève n composants, un tirage assimilé à n épreuves indépendantes, et l'on note F_n la fréquence des composants défectueux.**

1. **a.** $F_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, où X_i vaut 1 si le i-ième composant est défectueux et 0 sinon : $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$. C'est la moyenne d'un échantillon, donc $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

2. **b.** Par l'inégalité de concentration, puis $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$: $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant \dfrac{p(1-p)}{n \times 0{,}02^2} \leqslant \dfrac{1}{4n \times 0{,}0004}$, et
$$\frac{1}{4 \times 0{,}0004} = 625$$

3. **c.** $\dfrac{625}{2500} = 0{,}25$: avec une probabilité d'au moins 0,75, la fréquence observée est à moins de 0,02 de p.

4. **d.** Il suffit que $\dfrac{625}{n} \leqslant 0{,}05$, soit $n \geqslant 12\,500$:
$$\frac{625}{0{,}05} = 12500$$
une taille de 12 500 composants suffit.

5. **e.** $x \mapsto x(1-x)$ est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, donc pour $0 \leqslant p \leqslant 0{,}1$, $p(1-p) \leqslant 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09$. Il suffit alors que $\dfrac{0{,}09}{n \times 0{,}02^2} \leqslant 0{,}05$:
$$\frac{0{,}09}{0{,}05 \times 0{,}02^2} = 4500$$
une taille de 4 500 composants suffit alors : mieux connaître la variance réduit la taille garantie.

---

6 **Simulation. Un jeu rapporte 10 points avec la probabilité 0,2 et 0 point sinon ; X est le nombre de points. On reprend le programme de simulation de la section 2 du cours (graine 2026), où `de()` est remplacée par une fonction `X()` qui renvoie 10 si `random() < 0.2` et 0 sinon, avec `N, n = 500, 64` et `mu, sigma = 2, 4`. Il affiche `0.5244 0.5`, puis `1 0.714 0.714`, `2 0.946 0.946` et `3 0.996 0.994`.**

1. **a.** $E(X) = 10 \times 0{,}2 = 2$ et $E(X^2) = 100 \times 0{,}2 = 20$, donc :
$V(X) = 20 - 2^2 = 16$
$\sigma = 4$, et $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4}{\sqrt{64}} = 0{,}5$.

2. **b.** 0.5244 est l'écart type s de la série des 500 moyennes observées, 0.5 l'écart type théorique $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de M_{64} : ils sont proches, ce qui confirme $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

3. **c.** Pour $k = 2$: 94,6 % des moyennes sont à au plus $2 \times 0{,}5 = 1$ de 2, pour une garantie d'au moins $1 - \dfrac{1}{4} = 0{,}75$. Pour $k = 3$: 99,4 %, pour une garantie d'au moins :
$1 - \dfrac{1}{9} \approx 0{,}889$
les garanties sont respectées, avec une large marge.

4. **d.** Il suffit que $\dfrac{16}{n \times 0{,}5^2} \leqslant 0{,}1$, soit $n \geqslant \dfrac{16}{0{,}1 \times 0{,}25}$:
$$\frac{16}{0{,}1 \times 0{,}25} = 640$$
une taille de 640 suffit.

---

7 **Une borne atteinte. X prend les valeurs -2, 0 et 2 avec les probabilités $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{8}$.**

(1) **a.** Par symétrie, $E(X) = -2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} = 0$. Puis, comme $\mu = 0$:

$V(X) = (-2)^2 \times \frac{1}{8} + 0^2 \times \frac{3}{4} + 2^2 \times \frac{1}{8} = 1$

donc $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

(2) **b.** $P(|X| \geqslant 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{4}$, et la borne vaut $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$: il y a égalité. Pour $k = 2$, aucune borne plus petite que $\frac{1}{4}$ ne peut valoir pour **toutes** les variables aléatoires.

(3) **c.** $\{|X| \geqslant 1{,}5\} = \{X = -2\} \cup \{X = 2\}$, de probabilité $\frac{1}{4}$, et la borne vaut :

$\frac{1}{1{,}5^2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444$

ici l'inégalité est stricte.

(4) **d.** Dans la preuve, on retire de V les termes où $|x_i - \mu| < \delta$, puis on minore chaque $(x_i - \mu)^2$ restant par δ^2. Pour $\delta = 2$, le terme retiré est nul (valeur 0) et les termes gardés ont $(x_i - \mu)^2 = 4 = \delta^2$: aucune des deux étapes ne perd rien. Pour $\delta = 1{,}5$, en revanche, $(\pm 2)^2 = 4 > 1{,}5^2$: la seconde étape perd quelque chose, d'où l'inégalité stricte.

---

8 **Marche aléatoire. Un pion part de 0 et fait n pas ; chaque pas X_i vaut 1 ou -1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des autres. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ sa position.**

(1) **a.** $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $E(X_1^2) = 1$, donc $V(X_1) = 1 - 0^2 = 1$. Linéarité de l'espérance et additivité de la variance (pas indépendants) : $E(S_n) = 0$ et $V(S_n) = n$.

(2) **b.** $V(S_{400}) = 400$ et $\delta = 40$:

$\frac{400}{40^2} = 0{,}25$

donc $P(|S_{400}| \geqslant 40) \leqslant 0{,}25$: un écart de 2σ.

(3) **c.** $\frac{S_n}{n} = M_n$ est la moyenne d'un échantillon de la loi de X_1 ($\mu = 0$, $V = 1$). Inégalité de concentration avec $\delta = 0{,}1$:

$\frac{1}{0{,}1^2 n} = 100$

donc la probabilité est au plus $\frac{100}{n}$; elle est positive et $\frac{100}{n}$ tend vers 0 : par les gendarmes, elle tend vers 0.

(4) **d.** Il suffit que $\frac{100}{n} \leqslant 0{,}01$, soit $n \geqslant 10\,000$:

$\frac{100}{0{,}01} = 10000$

10 000 pas suffisent. La position S_n, elle, ne se concentre pas en 0, puisque $\sigma(S_n) = \sqrt{n}$ grandit : c'est la position **moyenne par pas** qui tend vers 0.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Calculer μ et V, puis appliquer Bienaymé-Tchebychev	4 pts	Écart type à la place de la variance ; borne écrite comme une égalité
Ramener l'événement à un écart centré en μ et passer au contraire	4 pts	Intervalle non centré ; inégalité stricte et large confondues pour une variable entière
Énoncer et démontrer concentration et loi des grands nombres	4 pts	$V(M_n) = \frac{V}{n^2}$; probabilité « égale à 0 » au lieu de « tend vers 0 » ; gendarmes non cités
Déterminer une taille d'échantillon suffisante	5 pts	Inéquation retournée ; arrondi par défaut ; « il faut » au lieu de « il suffit »
Lire une simulation et la comparer à la théorie	3 pts	Confondre n et N ; comparer s à $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$