EXERCICES

Bienaymé-Tchebychev — Concentration, loi des grands nombres

Tle

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Appliquer l'inégalité. Une variable aléatoire X a pour espérance 50 et pour écart type 4. ●○○

a. Majorer $P(|X - 50| \geqslant 10)$.

b. En déduire une minoration de $P(40 < X < 60)$.

c. Majorer $P(|X - 50| \geqslant 12)$ en exprimant 12 en nombre d'écarts types.

d. Que donne l'inégalité pour $\delta = 3$? Commenter.

2 Loi binomiale. S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400\,;0{,}2)$. ●●○

a. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

b. Majorer $P(|S - 80| \geqslant 16)$. Un programme donne la valeur exacte : environ 0,0524. Comparer.

c. Minorer $P(65 \leqslant S \leqslant 95)$.

d. Minorer $P(60 \leqslant S \leqslant 90)$.

3 Repérer l'erreur. Une variable aléatoire X a pour espérance 12 et pour écart type 3. On cherche une taille n d'échantillon telle que $P(|M_n - 12| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}1$. Lucas écrit : « $V = 3$, donc il faut $\dfrac{3}{n \times 0{,}5^2} \leqslant 0{,}1$, soit $n \leqslant \dfrac{3}{0{,}1 \times 0{,}5^2} = 120$. Il faut donc prendre $n = 120$. » ●●○

a. Relever les trois erreurs de Lucas.

b. Rédiger une solution correcte.

4 **Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.** ●●○

a. Si $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$, alors $P(6 < X < 14) \geqslant 0{,}75$.

b. Si $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$, alors $P(|X - 10| \geqslant 4) = 0{,}25$.

c. Pour toute variable aléatoire, $P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant 0{,}12$.

d. Si M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de variance V, alors $V(M_n) = \dfrac{V}{n^2}$.

e. Après dix « pile » consécutifs avec une pièce équilibrée, « face » est plus probable au lancer suivant.

f. Multiplier la taille d'un échantillon par 4 divise par 2 l'écart type de sa moyenne.

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. Si $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$, alors $P(6 < X < 14) \geqslant 0{,}75$.		
b. Si $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$, alors $P(\|X - 10\| \geqslant 4) = 0{,}25$.		
c. Pour toute variable aléatoire, $P(\|X - \mu\| \geqslant 3\sigma) \leqslant 0{,}12$.		
d. Si M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une loi de variance V, alors $V(M_n) = \dfrac{V}{n^2}$.		
e. Après dix « pile » consécutifs avec une pièce équilibrée, « face » est plus probable au lancer suivant.		
f. Multiplier la taille d'un échantillon par 4 divise par 2 l'écart type de sa moyenne.		

5 **Contrôle de qualité. Une usine fabrique des composants, dont une proportion p inconnue est défectueuse. On prélève n composants, un tirage assimilé à n épreuves indépendantes, et l'on note F_n la fréquence des composants défectueux.** ●●○

a. Justifier que $E(F_n) = p$ et $V(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

b. Montrer que $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant \dfrac{625}{n}$.

c. Pour $n = 2\,500$, que peut-on garantir ?

d. Quelle taille n suffit pour que $P(|F_n - p| \geqslant 0{,}02) \leqslant 0{,}05$?

e. On sait en plus que $p \leqslant 0{,}1$. Justifier que $p(1-p) \leqslant 0{,}09$, puis reprendre la question d.

6 **Simulation. Un jeu rapporte 10 points avec la probabilité 0,2 et 0 point sinon ; X est le nombre de points. On reprend le programme de simulation de la section 2 du cours (graine 2026), où `de()` est remplacée par une fonction `X()` qui renvoie 10 si `random() < 0.2` et 0 sinon, avec `N, n = 500, 64` et `mu, sigma = 2, 4`. Il affiche `0.5244 0.5`, puis `1 0.714 0.714`, `2 0.946 0.946` et `3 0.996 0.994`.** ●●●

a. Vérifier que $E(X) = 2$ et $\sigma(X) = 4$, puis calculer $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b. Que représentent 0.5244 et 0.5 ? Les comparer.

c. Comparer les proportions affichées aux garanties de Bienaymé-Tchebychev pour $k = 2$ et $k = 3$.

d. Quelle taille n suffit pour que $P(|M_n - 2| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}1$?

7 **Une borne atteinte. X prend les valeurs -2, 0 et 2 avec les probabilités $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{8}$.** ●●●

a. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

b. Calculer $P(|X| \geqslant 2)$ et la borne de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta = 2$. Que peut-on en conclure sur la borne $\dfrac{1}{k^2}$?

c. Reprendre la question b pour $\delta = 1{,}5$.

d. En reprenant la preuve du cours, expliquer pourquoi l'égalité a lieu pour $\delta = 2$.

8 **Marche aléatoire. Un pion part de 0 et fait n pas ; chaque pas X_i vaut 1 ou -1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, indépendamment des autres. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ sa position.** ●●●

a. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$, puis $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

b. Majorer $P(|S_{400}| \geqslant 40)$.

c. Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \dfrac{100}{n}$, et en déduire la limite de cette probabilité.

d. Quel nombre de pas suffit pour que cette probabilité soit au plus 0,01 ?

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Bienaymé-Tchebychev — Concentration, loi des grands nombres ».