

Loi normale — densité, règle 68- 95-99,7 et intervalles

Jusqu'ici, une variable aléatoire prenait des valeurs isolées qu'on pouvait énumérer. Une taille, une durée, une masse ne fonctionnent pas ainsi : entre 1,70 m et 1,71 m il y a une infinité de valeurs, et demander la probabilité d'une taille **exactement** égale à 1,70 m n'a pas de sens. Le passage au **continu** remplace donc la liste des probabilités par une **aire sous une courbe** — et parmi toutes ces courbes, une revient partout dès qu'un phénomène résulte de nombreuses causes indépendantes : la **cloche**.

1 Variables continues et densité

DÉFINITION

Une variable aléatoire est **continue** lorsqu'elle prend toutes les valeurs d'un intervalle. Sa loi n'est plus donnée par un tableau mais par une **fonction de densité** f , positive, dont l'aire totale sous la courbe vaut 1. La probabilité que X tombe entre a et b est alors l'**aire** correspondante, c'est-à-dire une intégrale. Toutes les probabilités du chapitre sont donc des aires, et c'est ce qui relie ce chapitre à l'intégration.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$$

LE PIÈGE QUI COÛTE LE PLUS DE POINTS

Croire que $P(X = 1,70) = 0$ signifie que cette taille est impossible. — pour une variable continue, l'aire au-dessus d'un point unique est nulle : la probabilité d'une valeur isolée est **toujours** 0, même pour une valeur parfaitement atteignable. Probabilité nulle et impossibilité ne sont pas la même chose dès qu'on quitte le discret.

Le réflexe : une conséquence pratique et commode : les inégalités strictes et larges donnent le même résultat. $P(X < a)$, $P(X \leq a)$ — c'est identique, et l'on n'a plus à se demander si la borne est incluse.

2 La loi normale

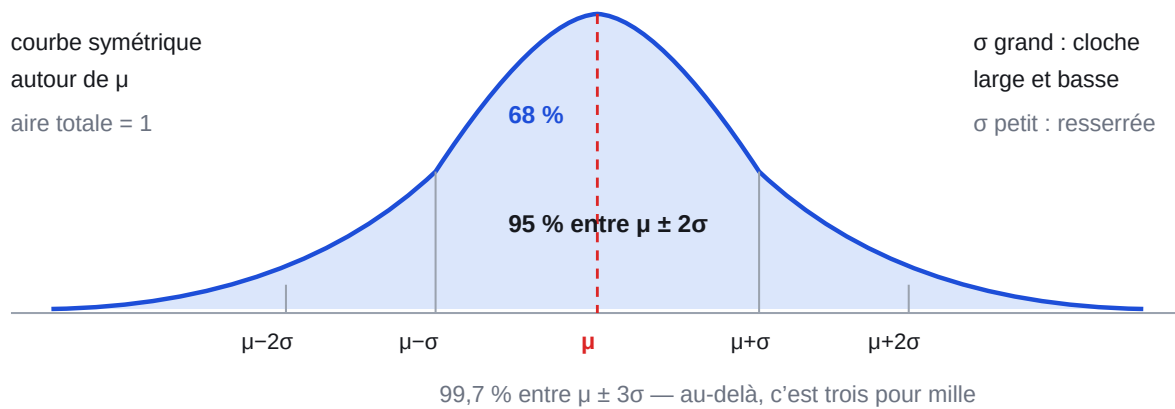
DÉFINITION

Une variable suit la **loi normale de paramètres μ et σ** , notée $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, lorsque sa densité est la courbe en cloche centrée en μ . Les deux paramètres se lisent directement dessus : μ est l'**espérance**, c'est-à-dire l'axe de symétrie de la cloche, et σ l'**écart-type**, qui mesure son étalement. Un σ petit donne une cloche resserrée et haute — les valeurs sont concentrées autour de la moyenne ; un σ grand l'aplatit.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \quad \text{avec} \quad E(X) = \mu \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sigma$$

la règle 68 – 95 – 99,7 : trois écarts-types suffisent à tout contenir

courbe symétrique
autour de μ
aire totale = 1



σ grand : cloche
large et basse
 σ petit : resserrée

La règle 68 – 95 – 99,7 : ce que contiennent un, deux et trois écarts-types.

PROPRIÉTÉ

Trois valeurs suffisent à répondre de tête à la plupart des questions, et il faut les connaître. Environ **68 %** des valeurs tombent entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$; environ **95 %** entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$; environ **99,7 %** entre $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$. La **symétrie** de la cloche donne le reste : $P(X \leq \mu) = 0,5$, et ce qui dépasse d'un côté vaut exactement ce qui dépasse de l'autre. Ainsi $P(X > \mu + 2\sigma)$ vaut la moitié de $1 - 0,95$, soit $0,025$.

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

RÉPONDRE À UNE QUESTION SUR UNE LOI NORMALE

- ① **Écrire la loi** avec ses deux paramètres : « X suit la loi normale d'espérance $\mu = \dots$ et d'écart-type $\sigma = \dots$ ». L'écart-type, non la variance — c'est σ qu'on emploie ensuite.
- ② **Traduire la question en inégalité** : « au moins », « au plus », « entre ». Les bornes incluses ou non ne changent rien.
- ③ **Chercher si les bornes sont à $\mu \pm \sigma$, $\pm 2\sigma$ ou $\pm 3\sigma$** . Si oui, la règle suffit et aucune calculatrice n'est nécessaire — l'énoncé l'attend souvent.
- ④ **Sinon, utiliser la calculatrice**, qui donne directement $P(a \leq X \leq b)$. Pour $P(X > a)$, prendre le complément à 1 ; pour $P(X < a)$, borner à gauche par une valeur très petite.
on écrit toujours la probabilité cherchée **avant** de donner le nombre : c'est la traduction qui est notée, pas la touche pressée.
- ⑤ **Conclure dans le contexte**, avec une phrase et un pourcentage arrondi.

EXEMPLE

Les scores à un test suivent la loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 15. Quelle proportion de la population obtient entre 85 et 115 ? Et plus de 130 ?

- ① On repère les bornes par rapport à μ : $85 = 100 - 15$ et $115 = 100 + 15$.
 $100 - 15 = 85$
- ② Ce sont exactement $\mu \pm \sigma$: la règle donne directement la réponse.
 $100 + 15 = 115$
environ 68 % de la population.
- ③ Pour 130 : $130 = 100 + 2 \times 15$, soit $\mu + 2\sigma$.
 $100 + 30 = 130$
- ④ Hors de $\mu \pm 2\sigma$, il reste 5 %, répartis également des deux côtés par symétrie.
 $1 - 0,95 = 0,05$
- ⑤ On prend la moitié.
 $0,05 \div 2 = 0,025$
environ 2,5 % dépassent 130.

Environ 68 % entre 85 et 115 ; environ 2,5 % au-delà de 130.

DÉFINITION

La loi $\mathcal{N}(0; 1)$ — espérance 0, écart-type 1 — est dite **centrée réduite**. Toute loi normale s'y ramène par le changement de variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$: on retranche la moyenne, puis on divise par l'écart-type. Le nombre obtenu, appelé **score réduit**, dit à **combien d'écarts-types de la moyenne** se situe la valeur — et c'est cette information, et non la valeur brute, qui mesure le caractère exceptionnel d'une observation.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0; 1)$$

EXEMPLE

Un élève obtient 130 à un test de moyenne 100 et d'écart-type 15, et 62 à un autre de moyenne 50 et d'écart-type 8. Laquelle de ces deux performances est la plus rare ?

- ① Les deux notes ne sont pas comparables telles quelles : les échelles diffèrent. On calcule les scores réduits.

$$130 - 100 = 30$$

- ② Pour le premier test, on divise l'écart par l'écart-type.

$$30 \div 15 = 2$$

$z_1 = 2$: deux écarts-types au-dessus de la moyenne.

- ③ Pour le second, l'écart vaut 12.

$$62 - 50 = 12$$

- ④ Puis le score réduit.

$$12 \div 8 = 1.5$$

$z_2 = 1,5$ seulement.

- ⑤ Le premier score est donc le plus exceptionnel, bien que 62 « paraisse » moins loin de 50 que 130 de 100.

$$2 - 1.5 = 0.5$$

environ 2,5 % dépassent $z = 2$, contre près de 7 % pour $z = 1,5$.

Le 130 est la performance la plus rare : $z = 2$ contre $z = 1,5$.

Pourquoi cette courbe-là, et pas une autre ? Parce qu'elle apparaît **dès qu'une grandeur résulte de l'addition de nombreuses causes indépendantes**, quelles que soient ces causes. La taille d'un adulte, l'erreur d'un instrument de mesure, le total de mille lancers de dé : chacune est une somme de petits effets, et chacune donne une cloche. C'est aussi pourquoi la loi **binomiale** s'en rapproche quand n grandit — un histogramme de $\mathcal{B}(100; 0,5)$ est déjà une cloche à l'œil nu. La loi normale n'est pas un modèle parmi d'autres : c'est la forme vers laquelle les sommes convergent.

3 Fluctuation et confiance

DÉFINITION

On connaît la proportion p dans la population, et l'on se demande ce que donnera un échantillon. L'**intervalle de fluctuation** au seuil de 95 % est $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$: dans 95 % des échantillons de taille n , la fréquence observée y tombe. Il sert à **décider** — une fréquence observée hors de cet intervalle jette le doute sur l'hypothèse p , et c'est le principe de tout test statistique.

$$I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

DÉFINITION

La situation inverse, et la plus fréquente : on ignore p , on observe une fréquence f sur un échantillon de taille n , et l'on veut encadrer p . L'**intervalle de confiance** au niveau 95 % est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$. La formule est la même, les rôles sont échangés — et c'est ce qui les fait confondre. Le sens de la phrase change du tout au tout : ici, c'est p qui est inconnu, et l'intervalle qui est aléatoire.

$$I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

EXEMPLE

Un sondage sur 2 500 personnes donne 53 % d'intentions favorables. Peut-on affirmer, au niveau de confiance 95 %, que le candidat est majoritaire ?

- ① On calcule la demi-amplitude, qui ne dépend que de la taille de l'échantillon.

$$\sqrt{2500} = 50$$

- ② Elle vaut donc 0,02.

$$1 \div 50 = 0.02$$

- ③ La borne inférieure de l'intervalle de confiance :

$$0.53 - 0.02 = 0.51$$

- ④ Et la borne supérieure :

$$0.53 + 0.02 = 0.55$$

- ⑤ L'intervalle $[0,51 ; 0,55]$ ne contient pas 0,5.

$$0.51 - 0.5 = 0.010000000000000009$$

toutes les valeurs plausibles de p dépassent 50 % : on peut conclure à la majorité, au niveau 95 %.

Oui : $p \in [0,51 ; 0,55]$, entièrement au-dessus de 50 %.

La demi-amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$ explique une chose que les commentaires de sondages disent rarement : la précision progresse comme la **racine** de la taille de l'échantillon. Passer de 1 000 à 4 000 personnes ne divise pas la marge par quatre mais par deux. Interroger dix fois plus de monde ne rend le sondage que trois fois plus précis — voilà pourquoi les instituts s'arrêtent autour d'un millier de personnes, et pourquoi deux sondages qui « se contredisent » de deux points ne se contredisent pas du tout.

À VÉRIFIER

- Ai-je écrit la loi avec μ et l'écart-type σ , non la variance ?
- Ai-je vérifié si les bornes tombent sur $\mu \pm \sigma$, $\pm 2\sigma$ ou $\pm 3\sigma$?
- Ai-je utilisé la **symétrie** pour répartir ce qui dépasse ?
- Ai-je écrit la probabilité cherchée avant de donner le nombre ?
- Fluctuation ou confiance : lequel des deux, p ou f , est connu ?
- Ai-je conclu par une phrase dans le contexte, et non par un nombre seul ?

À RETENIR

- Variable continue : les probabilités sont des **aires**, et $P(X = a) = 0$.
- Bornes strictes ou larges : aucune différence.
- $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$: μ est l'axe de symétrie, σ l'étalement.
- 68 % à $\mu \pm \sigma$ · 95 % à $\mu \pm 2\sigma$ · 99,7 % à $\mu \pm 3\sigma$.
- $P(X \leq \mu) = 0,5$, et la symétrie répartit ce qui dépasse.
- Fluctuation : p **connu**, on prédit f . Confiance : f **observé**, on encadre p .
- Demi-amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}}$: la précision suit la **racine** de l'effectif.