CORRIGÉ

Tle

Corrigé détaillé
7 exercices

Sinus et cosinus — Dérivées, variations et courbes

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 Calculer la dérivée de chaque fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. $f'(x) = 3\cos x - 2 \times (-\sin x) = 3\cos x + 2\sin x$. b. Avec $u(x) = 4x - \dfrac{\pi}{3}$ et $u'(x) = 4$: $g'(x) = -4\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
2. c. Produit : $h'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x = \sin x + x\cos x$.
3. d. $k = \exp \circ \cos$: $k'(x) = \exp'(\cos x) \times (-\sin x) = -\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x}$. e. $m = u^2$ avec $u = \sin$: $m'(x) = 2u(x)u'(x) = 2\sin x \cos x$.
4. Conclusion : $f'(x) = 3\cos x + 2\sin x$, $g'(x) = -4\sin\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $h'(x) = \sin x + x\cos x$, $k'(x) = -\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x}$ et $m'(x) = 2\sin x \cos x$.

2 Vrai ou faux ? Justifier.

1. a. **Vrai.** Sur $[-\pi\,;0]$, $\sin x \leqslant 0$, donc $\cos'(x) = -\sin x \geqslant 0$.
2. b. **Faux.** $\big(\sin(2x)\big)' = 2\cos(2x)$; en $x = 0$, cela vaut 2 et non $\cos 0 = 1$.
3. c. **Faux.** $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$ sont deux solutions, car le cosinus est pair.
4. d. **Vrai.** $\sin 0 = 0$ et $\sin'(0) = \cos 0 = 1$: la tangente est $y = 1 \times (x - 0) + 0$.
5. e. **Faux.** Le point $(0\,;1)$ est sur la courbe, mais pas son symétrique $(0\,;-1)$, car $\cos 0 = 1 \neq -1$. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
6. Conclusion : a. vrai ; b. faux ; c. faux ; d. vrai ; e. faux.

3 Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$.

1. a. $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. b. $\cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$, donc $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2. c. $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$; on garde les points à droite de la droite d'abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. d. $\cos x < \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$: points à gauche, bornes $\pm\dfrac{\pi}{3}$ exclues.
4. e. $0{,}3 \in]-1\,;1[$: deux solutions $\pm\alpha$. En mode radian, $\cos(1{,}265) \approx 0{,}301 > 0{,}3$ et $\cos(1{,}27) \approx 0{,}296 < 0{,}3$; le cosinus décroît, donc $1{,}265 < \alpha < 1{,}27$ et $\alpha \approx 1{,}27$.
5. Conclusion : a. $\left\{-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right\}$; b. $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right\}$; c. $\left[-\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$; d. $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$; e. $x \approx -1{,}27$ ou $x \approx 1{,}27$.

4 **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$.**

1. a. $f(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x) = f(x)$ et $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$.
2. b. $f'(x) = 2\cos(2x)$. Si $x \in [0\,;\pi]$, $2x \in [0\,;2\pi]$, et $\cos(2x) \geqslant 0 \iff 2x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$: $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$, $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$.
3. c. f croît de $f(0) = 0$ à $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, décroît jusqu'à $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, puis croît jusqu'à $f(\pi) = \sin(2\pi) = 0$.
4. d. $f'(0) = 2$: la tangente en O est la droite $y = 2x$. On trace sur $[0\,;\pi]$, puis on complète sur $[-\pi\,;0]$ par la symétrie de centre O, car f est impaire.
5. Conclusion : une sinusoïde de période π, qui passe par O avec la pente 2, de maximum 1 en $\frac{\pi}{4}$ et en $-\frac{3\pi}{4}$, de minimum -1 en $\frac{3\pi}{4}$ et en $-\frac{\pi}{4}$.

---

5 **Repérer l'erreur. Lina étudie $f(x) = \cos(2x) + 1$ sur $[0\,;\pi]$: « $f'(x) = -\sin(2x)$; sur $[0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$, donc f est décroissante sur $[0\,;\pi]$. » Tom résout $\cos x \leqslant 0$ sur $[-\pi\,;\pi]$: « $\cos x \leqslant \cos\frac{\pi}{2}$, donc $x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{S} = \left[-\pi\,;\frac{\pi}{2}\right]$. »**

1. a. Le facteur 2 manque : $f'(x) = -2\sin(2x)$. Et Lina étudie le signe de $\sin x$ au lieu de celui de $\sin(2x)$.
2. b. Si $x \in [0\,;\pi]$, $2x \in [0\,;2\pi]$: $\sin(2x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(2x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.
3. Donc f décroît de $f(0) = 2$ à $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi + 1 = 0$, puis croît jusqu'à $f(\pi) = \cos(2\pi) + 1 = 2$.
4. c. Tom « simplifie » par le cosinus. Contre-exemple : $0 \in \left[-\pi\,;\frac{\pi}{2}\right]$, mais $\cos 0 = 1 > 0$. Avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on garde les points à gauche de l'axe des ordonnées.
5. Conclusion : f a pour minimum 0, atteint en $\frac{\pi}{2}$, et l'inéquation de Tom a pour ensemble solution $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

---

6 **La grande roue. Une grande roue de 18 m de rayon a son centre à 20 m du sol et fait un tour en 30 minutes. Une nacelle part du point le plus bas à l'instant $t = 0$; sa hauteur, en mètres, au bout de t minutes, est $h(t) = 20 - 18\cos\left(\frac{\pi t}{15}\right)$, pour $t \in [0\,;30]$.**

1. a. $h(0) = 20 - 18\cos 0 = 2$: départ à 2 m. $h(15) = 20 - 18\cos\pi = 38$: point le plus haut. $h(30) = 20 - 18\cos(2\pi) = 2$: retour en bas après un tour.
   $20 - 18 \times (-1) = 38$
2. b. $h'(t) = -18 \times \left(-\frac{\pi}{15}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{15}\right) = \frac{6\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi t}{15}\right)$.
   $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$
3. Pour $t \in [0\,;15]$, $\frac{\pi t}{15} \in [0\,;\pi]$ et le sinus est positif : h croît de 2 à 38. Pour $t \in [15\,;30]$, $\frac{\pi t}{15} \in [\pi\,;2\pi]$, le sinus est négatif : h décroît de 38 à 2.
4. c. $h(t) \geqslant 29 \iff -18\cos X \geqslant 9 \iff \cos X \leqslant -\frac{1}{2}$, en divisant par $-18 < 0$, ce qui change le sens.
   $9 \div (-18) = -\frac{1}{2}$
5. d. Sur $[0\,;2\pi]$, les points images à gauche de la droite d'abscisse $-\frac{1}{2}$ forment l'arc qui va de $\frac{2\pi}{3}$ à $\frac{4\pi}{3}$, car $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.
6. Or $t = \frac{15X}{\pi}$: $X = \frac{2\pi}{3}$ donne $t = 10$, et $X = \frac{4\pi}{3}$ donne $t = 20$; la nacelle est à 29 m ou plus pour $t \in [10\,;20]$.
   $15 \times \frac{4}{3} = 20$
7. Conclusion : sur un tour de 30 minutes, la nacelle reste 10 minutes à 29 m de hauteur ou plus, de la 10e à la 20e minute.

---

7 **Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-disque de centre O et de rayon 1 : A et B sont sur le diamètre, symétriques par rapport à O, et C, D sur le demi-cercle. On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{BOC}$, avec $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.**

1. a. Le triangle OBC est rectangle en B, avec $OC = 1$: $OB = \cos\theta$ et $BC = \sin\theta$. Donc $AB = 2\cos\theta$ et $\mathcal{A}(\theta) = 2\cos\theta \times \sin\theta$.
2. b. Produit : $\mathcal{A}'(\theta) = 2\left[\cos\theta \times \cos\theta + \sin\theta \times (-\sin\theta)\right] = 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, puis on factorise $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
3. c. Sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est strictement décroissant et le sinus strictement croissant : $\theta \mapsto \cos\theta - \sin\theta$ est strictement décroissante, et s'annule en $\frac{\pi}{4}$, car $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$. Elle est positive avant $\frac{\pi}{4}$, négative après.
4. d. $\cos\theta + \sin\theta > 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$: $\mathcal{A}'$ a le signe de $\cos\theta - \sin\theta$. $\mathcal{A}$ croît sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
5. Valeur du maximum :
   $2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$
6. Conclusion : l'aire est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}$; elle vaut alors 1, pour un rectangle de côtés $\sqrt{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Dériver sinus, cosinus et leurs composées	3 pts	Le signe moins de $\cos' = -\sin$ oublié, ou le facteur a de $\cos(ax+b)$
Étudier le signe de la dérivée et dresser le tableau de variations	4 pts	Un signe affirmé sans lecture sur le cercle ; le signe de $\sin x$ pris pour celui de $\sin(2x)$; des valeurs aux bornes absentes
Résoudre $\cos x = a$ et $\cos x \leqslant a$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$	5 pts	Une seule des deux solutions $\pm\alpha$; l'inégalité « simplifiée » par $\cos$; une borne stricte incluse
Exploiter période et parité pour tracer une courbe	4 pts	Une période mal calculée ; une symétrie annoncée sans le calcul de $f(-x)$
Optimiser une grandeur géométrique fonction d'un angle	4 pts	Un maximum conclu sans tableau de variations, ou une valeur de θ hors de l'intervalle imposé