COURS

Sinus et cosinus — Dérivées, variations et courbes

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

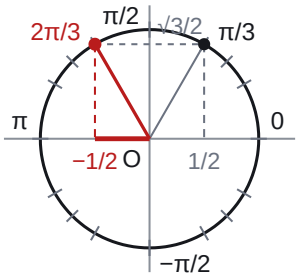
En première, le cosinus et le sinus d'un réel étaient les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique ; en terminale, ce sont des **fonctions** que l'on dérive et que l'on étudie. **Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$; elles sont 2π-périodiques, le cosinus est pair et le sinus impair : les étudier sur $[0\,;\pi]$ suffit à connaître toute leur courbe.** Elles servent aussi à optimiser une figure dès qu'un angle varie.

1 Rappels de première : cercle trigonométrique et valeurs remarquables

DÉFINITION

Le **cercle trigonométrique** a pour centre l'origine O d'un repère orthonormé $(O\,;I,J)$, pour rayon 1, et il est orienté dans le sens direct. En enroulant la droite des réels sur ce cercle à partir de I, tout réel x vient en un point M, son **point image** ; x est une mesure en **radians** (π rad correspond à 180°). Par définition, $\cos x$ est l'**abscisse** de M et $\sin x$ son **ordonnée** ; d'où $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. **Rappels de première** : x et $x + 2\pi$ ont le même point image, donc cosinus et sinus sont **2π-périodiques** ; le point image de $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, donc le cosinus est **pair** et le sinus **impair** ; ceux de $\pi - x$ et de $x + \dfrac{\pi}{2}$ donnent les autres relations utiles. Pour une valeur exacte : placer le point image, lire le signe sur le quadrant, se ramener au tableau.

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



valeurs remarquables (rappel de première)

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
cos x	1	√3/2	√2/2	1/2	0	−1
sin x	0	1/2	√2/2	√3/2	1	0

2π/3 = π − π/3 : cos 2π/3 = −cos π/3 = −1/2 et sin 2π/3 = sin π/3 = √3/2

les autres valeurs : par la parité, la période 2π et les angles associés

Les points images de $\dfrac{\pi}{3}$ et de $\dfrac{2\pi}{3}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : même sinus, cosinus opposés.

2 Dérivées, variations et courbes

PROPRIÉTÉ

Dérivées (admises) et composées (démontrées). Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$: la dérivée du sinus est le cosinus, celle du cosinus est l'**opposé** du sinus. Si u est dérivable sur un intervalle I, la relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ donne $(\sin u)' = u' \cos u$ et $(\cos u)' = -u' \sin u$; en particulier, pour $u(x) = ax + b$:

$$\sin' = \cos \qquad \cos' = -\sin \qquad \big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b) \qquad \big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$$

PROPRIÉTÉ

Variations (démontrées). Sur $[0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$, donc $\cos'(x) = -\sin x \leqslant 0$, nul seulement en 0 et en π : le cosinus est **strictement décroissant** sur $[0\,;\pi]$ et, par parité, strictement croissant sur $[-\pi\,;0]$. De même, $\sin' = \cos$ donne les variations du sinus.

cosinus sur [−π ; π]

x	−π		0		π
cos′(x) = −sin x	0	+	0	−	0
cos x	−1	↗	1	↘	−1

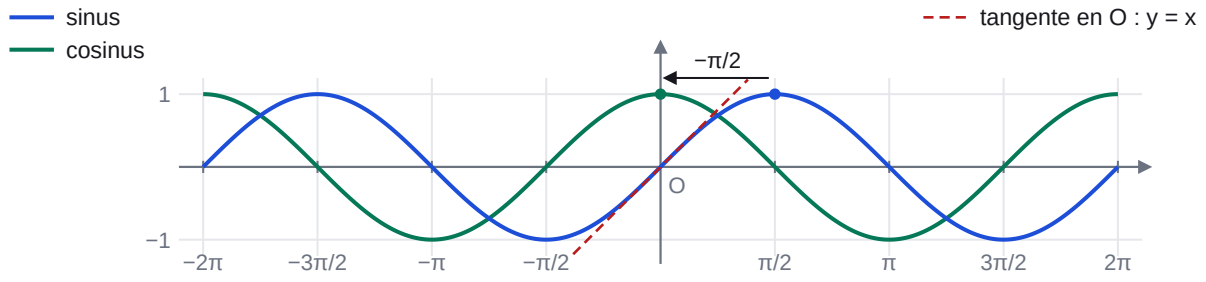
sinus sur [−π ; π]

x	−π		−π/2		π/2		π
sin′(x) = cos x		−	0	+	0	−	
sin x	0	↘	−1	↗	1	↘	0

Une période suffit : le cosinus est maximal en 0, le sinus en $\frac{\pi}{2}$; la dérivée s'annule là où la fonction change de sens.

PROPRIÉTÉ

Courbes (démontrées). Par parité, la courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées**, celle du sinus par rapport à l'**origine**. Par périodicité, on trace chacune sur un intervalle de longueur 2π, puis on la reproduit par les translations de vecteurs $2k\pi\,\vec{\imath}$, k entier. Comme $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, la courbe du cosinus est l'image de celle du sinus par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\,\vec{\imath}$: ce sont des **sinusoïdes**. Enfin $\sin'(0) = \cos 0 = 1$: la tangente en O à la courbe du sinus est la droite $y = x$.



Tangentes horizontales aux extremums. Le sommet du sinus en $\frac{\pi}{2}$, translaté de $-\frac{\pi}{2}$, devient celui du cosinus en 0.

ÉTUDIER ET TRACER UNE FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE

1. **Réduire l'intervalle d'étude** : une période si $f(x+T) = f(x)$; une demi-période si f est de plus paire ou impaire.
2. **Dériver** (le coefficient a de $ax + b$ sort **devant**), puis **lire le signe de $f'(x)$ sur le cercle** : cosinus positif à droite de l'axe des ordonnées, sinus positif au-dessus de l'axe des abscisses.
3. **Dresser le tableau**, valeurs exactes comprises, puis **tracer** : tangentes horizontales aux extremums, symétrie, translations.

EXEMPLE

Soit $f(x) = \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est paire et π-périodique, puis étudier ses variations sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$ et $f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) = f(x)$: l'étude sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, une demi-période, suffit.
2. $f'(x) = -2\sin(2x)$. Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \in [0\,;\pi]$, donc $\sin(2x) \geqslant 0$ et $f'(x) \leqslant 0$, nul seulement en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

f décroît de $f(0) = 1$ à $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$; la parité puis la période π donnent toute la courbe.

PIÈGE

Écrire $(\cos x)' = \sin x$. — le cosinus **décroît** sur $[0\,;\pi]$, où $\sin x \geqslant 0$: sa dérivée y est $-\sin x \leqslant 0$.

Ce que ça coûte : la dérivée et tout le tableau.

Le réflexe : contrôler en $\frac{\pi}{2}$, où le cosinus descend.

PIÈGE

Dériver $\cos(3x)$ en $-\sin(3x)$. — c'est une composée : $\big(\cos(3x)\big)' = -3\sin(3x)$.

Ce que ça coûte : la dérivée, et ce qui en dépend.

Le réflexe : écrire u et u' avant de dériver $\cos u$.

PIÈGE

Donner à $x \mapsto \cos(2x)$ la période 2π. — $2x$ parcourt 2π quand x parcourt π : la période est π.

Ce que ça coûte : le tracé entier.

Le réflexe : vérifier $f(x+T) = f(x)$ avant de tracer.

3 Résoudre une équation ou une inéquation en cosinus

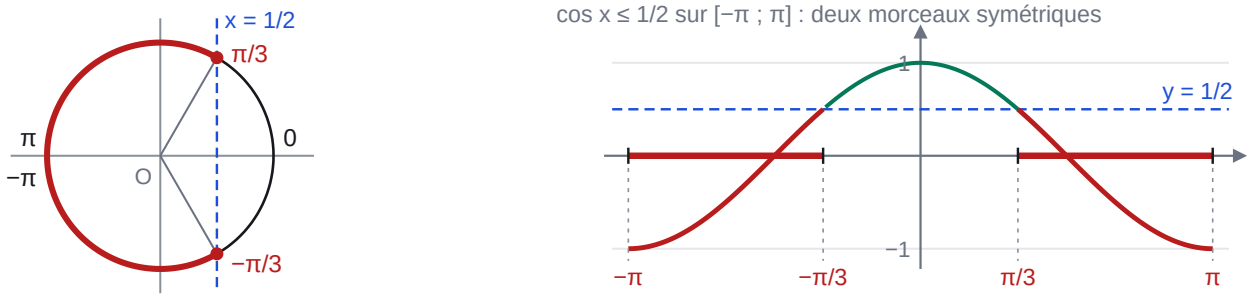
PROPRIÉTÉ

L'équation $\cos x = a$ sur $[-\pi\,;\pi]$ (démontrée). Soit $a \in]-1\,;1[$. Le cosinus est continu et strictement décroissant sur $[0\,;\pi]$, de 1 à -1 : d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), il existe un **unique** $\alpha \in]0\,;\pi[$ tel que $\cos\alpha = a$. Par parité, $-\alpha$ est l'unique solution dans $[-\pi\,;0]$, où le cosinus est strictement croissant : l'équation a **exactement deux solutions**, α et $-\alpha$. Si $a = 1$: 0 seul ; si $a = -1$: $-\pi$ et π ; si $|a| > 1$: aucune.

PROPRIÉTÉ

Inéquations (démontrées). Pour $x \in [0\,;\pi]$, le cosinus étant strictement décroissant, $\cos x \leqslant a \iff x \geqslant \alpha$; la parité donne l'autre moitié. Sur le cercle : les points images **à gauche** de la droite d'abscisse a ; sur la courbe : sous la droite $y = a$.

$$\cos x \leqslant a \iff x \in [-\pi\,;-\alpha] \cup [\alpha\,;\pi] \qquad \cos x \geqslant a \iff x \in [-\alpha\,;\alpha]$$



Pour $a = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$: en rouge, les solutions de $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$, sur le cercle et sur la courbe.

RÉSOUDRE UNE INÉQUATION EN COSINUS

1. **Isoler** $\cos x$ (diviser par un négatif change le sens), puis **trouver** $\alpha \in [0\,;\pi]$ **tel que** $\cos\alpha = a$: valeurs remarquables et angles associés, sinon valeur approchée à la calculatrice (mode radian) ou par dichotomie.
2. **Lire la solution sur le cercle** avec la droite d'abscisse a : à gauche pour $\leqslant$, à droite pour $\geqslant$; exclure $\pm\alpha$ si l'inégalité est stricte.
   contrôle : tester $x = 0$, où $\cos 0 = 1$.

EXEMPLE

Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $2\cos x + \sqrt{3} \leqslant 0$.

1. Elle équivaut à $\cos x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Or $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.
   $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
2. Points à gauche de la droite d'abscisse $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Contrôle : $\cos\pi = -1$ convient, $\cos 0 = 1$ non.

$$\mathcal{S} = \left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right].$$

PIÈGE

Résoudre $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi\,;\pi]$ et écrire $\mathcal{S} = \left[\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$. — seule la moitié supérieure du cercle a été lue : $-\dfrac{2\pi}{3}$ convient aussi. Par parité, il manque $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Ce que ça coûte : la moitié de l'ensemble solution.

Le réflexe : sur $[-\pi\,;\pi]$, toute solution x en donne une autre, $-x$.

PIÈGE

De $\cos x \leqslant \cos\dfrac{\pi}{3}$, déduire $x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$. — c'est « simplifier par cos », qui n'est pas croissant : $x = 0$ vérifie $x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, mais $\cos 0 = 1$.

Ce que ça coûte : tout l'ensemble solution.

Le réflexe : lire la solution sur le cercle ou sur la courbe.

4 Étudier une fonction trigonométrique dans un problème

OPTIMISER UNE GRANDEUR QUI DÉPEND D'UN ANGLE

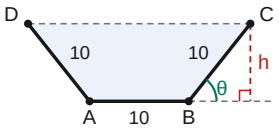
1. **Choisir l'angle** θ et son intervalle, imposé par la figure ; **exprimer la grandeur** avec $\cos\theta$ et $\sin\theta$, dans un triangle rectangle.
2. **Dériver et factoriser** : avec $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, on obtient souvent un polynôme en $\cos\theta$, dont le signe se lit sur le cercle. **Conclure** par le tableau de variations.

EXEMPLE

La gouttière. Sa section est un trapèze isocèle $ABCD$: un fond $[AB]$ et deux bords $[BC]$ et $[AD]$ de 10 cm, qui font avec le prolongement du fond un angle $\theta \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Pour quel angle l'aire de la section est-elle maximale ?

1. Hauteur $10\sin\theta$; chaque bord dépasse le fond de $10\cos\theta$, donc $CD = 10 + 20\cos\theta$ et $\mathcal{A}(\theta) = \dfrac{(10 + 10 + 20\cos\theta)\times 10\sin\theta}{2} = 100\sin\theta\,(1+\cos\theta)$.
2. $\mathcal{A}'(\theta) = 100\left[\cos\theta\,(1+\cos\theta) - \sin^2\theta\right] = 100\,(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = 100\,(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$. Contrôle pour $\cos\theta = 1$: $2\times 1^2 + 1 - 1 = (2-1)\times(1+1) = 2$
3. $\cos\theta + 1 > 0$; sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $2\cos\theta - 1 \geqslant 0 \iff \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$: $\mathcal{A}$ croît sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right]$, puis décroît. Maximum : $100\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2} = 75\times\sqrt{3} \approx 129{,}9$

Aire maximale pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $75\sqrt{3} \approx 129{,}9$ cm², contre 100 cm² avec des bords verticaux. La section est un demi-hexagone régulier.



La section, pour un angle θ quelconque.

PIÈGE

Annuler $\mathcal{A}'$ et conclure au maximum sans étudier le signe, ou retenir $\cos\theta = -1$. — $\cos\theta = -1$ donne $\theta = \pi$, hors de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$; et une dérivée nulle peut signaler un minimum.

Ce que ça coûte : la justification du maximum, donc la conclusion.

Le réflexe : dresser le tableau sur l'intervalle imposé, et comparer aux valeurs aux bornes.

À VÉRIFIER

- Ai-je travaillé en **radians**, calculatrice comprise ?
- Ai-je écrit le signe moins de $\cos' = -\sin$, et le facteur a de $\cos(ax+b)$?
- Pour $\cos x = a$ ou $\cos x \leqslant a$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$, ai-je gardé les solutions **des deux côtés** de l'axe des abscisses ?
- Ai-je justifié un optimum par le tableau de variations sur l'intervalle imposé ?

À RETENIR

- $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$; $\big(\sin(ax+b)\big)' = a\cos(ax+b)$ et $\big(\cos(ax+b)\big)' = -a\sin(ax+b)$.
- Période 2π ; cosinus pair (courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), sinus impair (courbe symétrique par rapport à O) ; tangente $y = x$ en O au sinus.
- Le cosinus croît sur $[-\pi\,;\,0]$ et décroît sur $[0\,;\,\pi]$; le sinus croît sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
- Sur $[-\pi\,;\,\pi]$, avec $\alpha \in [0\,;\,\pi]$ et $\cos\alpha = a$: $\cos x = a \iff x = \pm\alpha$; $\cos x \leqslant a \iff x \in [-\pi\,;\,-\alpha] \cup [\alpha\,;\,\pi]$.