EXERCICES

Sinus et cosinus — Dérivées, variations et courbes

Tle

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Calculer la dérivée de chaque fonction, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

●○○

a. $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$

b. $g(x) = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

c. $h(x) = x\sin x$

d. $k(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$

e. $m(x) = \sin^2 x$

2 Vrai ou faux ? Justifier.

●○○

a. « La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi\,;0]$. »

b. « Pour tout réel x, $\big(\sin(2x)\big)' = \cos(2x)$. »

c. « Dans $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ a une seule solution. »

d. « La tangente en O à la courbe du sinus a pour équation $y = x$. »

e. « La courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'origine du repère. »

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. « La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi\,;0]$. »		
b. « Pour tout réel x, $\big(\sin(2x)\big)' = \cos(2x)$. »		
c. « Dans $[-\pi\,;\pi]$, l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$ a une seule solution. »		
d. « La tangente en O à la courbe du sinus a pour équation $y = x$. »		
e. « La courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'origine du repère. »		

3 **Résoudre dans $[-\pi\,;\pi]$.** ●●○

a. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. $2\cos x + 1 = 0$

c. $\cos x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d. $2\cos x - 1 < 0$

e. $\cos x = 0{,}3$ (solutions arrondies au centième)

4 **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x)$.** ●●○

a. Montrer que f est périodique de période π, et impaire.

b. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\pi]$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.

d. Tracer la courbe de f sur $[-\pi\,;\pi]$, avec 2 cm pour une unité sur chaque axe, et sa tangente en O.

5 **Repérer l'erreur. Lina étudie $f(x) = \cos(2x) + 1$ sur $[0\,;\pi]$: « $f'(x) = -\sin(2x)$; sur $[0\,;\pi]$, $\sin x \geqslant 0$, donc f est décroissante sur $[0\,;\pi]$. » Tom résout $\cos x \leqslant 0$ sur $[-\pi\,;\pi]$: « $\cos x \leqslant \cos\dfrac{\pi}{2}$, donc $x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\mathcal{S} = \left[-\pi\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. »** ●●○

a. Relever les deux erreurs de Lina.

b. Rédiger l'étude correcte et dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.

c. Réfuter la réponse de Tom par un contre-exemple, puis la corriger.

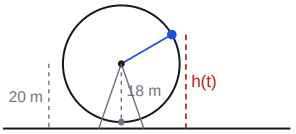
6 **La grande roue. Une grande roue de 18 m de rayon a son centre à 20 m du sol et fait un tour en 30 minutes. Une nacelle part du point le plus bas à l'instant $t = 0$; sa hauteur, en mètres, au bout de t minutes, est $h(t) = 20 - 18\cos\left(\dfrac{\pi t}{15}\right)$, pour $t \in [0\,;30]$.** ●●●

a. Calculer $h(0)$, $h(15)$ et $h(30)$, et les interpréter.

b. Calculer $h'(t)$, puis étudier les variations de h sur $[0\,;30]$.

c. On pose $X = \dfrac{\pi t}{15}$, avec $X \in [0\,;2\pi]$. Montrer que $h(t) \geqslant 29$ équivaut à $\cos X \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

d. Pendant combien de minutes, sur un tour, la nacelle est-elle à 29 m de hauteur ou plus ?



La nacelle et sa hauteur.

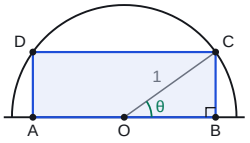
7 **Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-disque de centre O et de rayon 1 : A et B sont sur le diamètre, symétriques par rapport à O, et C, D sur le demi-cercle. On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{BOC}$, avec $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.** ●●●

a. Montrer que l'aire du rectangle est $\mathcal{A}(\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

b. Montrer que $\mathcal{A}'(\theta) = 2(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)$.

c. Étudier le signe de $\cos\theta - \sin\theta$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

d. En déduire l'angle pour lequel l'aire est maximale, et cette aire maximale.



Le rectangle et l'angle θ.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Sinus et cosinus — Dérivées, variations et courbes ».