CORRIGÉ

Tle

Corrigé détaillé
8 exercices

Sommes de variables — Espérance, variance, échantillons

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

1 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(X)=3$, $V(X)=4$, $E(Y)=-1$ et $V(Y)=9$.

1. **a.** Par linéarité, $E(2X-3Y+1)=2E(X)-3E(Y)+1$:
   $2\times 3-3\times(-1)+1=10$
2. **b.** $V(2X+5)=2^2\,V(X)$, la constante ne disperse pas :
   $4\times 4=16$
   $\sigma(2X+5)=\sqrt{16}=4$, soit $2\sigma(X)$.
3. **c.** X et Y sont indépendantes : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ et $V(X-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)$, donc dans les deux cas :
   $4+9=13$
4. **d.** $\sigma(X)+\sigma(Y)=2+3=5$, alors que :
   $\sigma(X+Y)=\sqrt{13}\approx 3{,}61$
   conclusion : $\sigma(X+Y)\neq\sigma(X)+\sigma(Y)$, les écarts types ne s'ajoutent pas.

---

2 Un archer tire une flèche sur chacune de trois cibles. Il atteint la première avec la probabilité 0,9, la deuxième avec 0,8 et la troisième avec 0,6 ; les trois tirs sont indépendants. X est le nombre de cibles atteintes.

1. **a.** Pour $i=1,2,3$, soit T_i la variable qui vaut 1 si la cible i est atteinte, 0 sinon. Chaque cible atteinte ajoute 1 : $X=T_1+T_2+T_3$, où T_1, T_2, T_3 suivent les lois de Bernoulli de paramètres 0,9 ; 0,8 et 0,6.
2. **b.** Par linéarité :
   $E(X)=0{,}9+0{,}8+0{,}6=2{,}3$
3. **c.** Les tirs sont indépendants, donc les T_i aussi ; $V(T_i)=p_i(1-p_i)$ et :
   $V(X)=0{,}9\times 0{,}1+0{,}8\times 0{,}2+0{,}6\times 0{,}4=0{,}49$
   $\sigma(X)=\sqrt{0{,}49}=0{,}7$ cible.
4. **d.** Non. Les épreuves sont indépendantes mais **pas identiques**. Et aucune loi $\mathcal{B}(3,p)$ ne convient : il faudrait $3p=2{,}3$, mais alors
   $3\times\frac{2{,}3}{3}\times\left(1-\frac{2{,}3}{3}\right)\approx 0{,}54$
   et non 0,49.
5. Conclusion : $E(X)=2{,}3$ cibles, $V(X)=0{,}49$ et $\sigma(X)=0{,}7$, obtenus sans la loi de X, qui n'est pas binomiale.

---

3 Une machine produit des pièces ; chacune est défectueuse avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres. On prélève un lot de 50 pièces, assimilé à 50 tirages avec remise ; X est le nombre de pièces défectueuses du lot.

1. **a.** On répète 50 fois, de façon indépendante, la même épreuve à deux issues : la pièce est défectueuse (succès, de probabilité 0,04) ou non. X compte les succès : X suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}04)$.
2. **b.** $E(X)=np=50\times 0{,}04=2$, puis :
   $V(X)=50\times 0{,}04\times 0{,}96=1{,}92$
   $\sigma(X)=\sqrt{1{,}92}\approx 1{,}39$ pièce.
3. **c.** $C=12X+30$. Par linéarité, $E(C)=12\times 2+30=54$; l'écart type est multiplié par 12, la constante ne compte pas :
   $\sigma(C)=12\times\sqrt{1{,}92}\approx 16{,}63$
4. Conclusion : un lot coûte en moyenne 54 €, avec un écart type d'environ 16,63 €.

---

4 **Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.**

1. **a. Vrai.** La linéarité de l'espérance vaut pour toutes variables définies sur le même univers, indépendantes ou non.
2. **b. Faux.** $V(-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$. Pour un dé, $V(-X) = \dfrac{35}{12}$, et non $-\dfrac{35}{12}$: une variance n'est jamais négative.
3. **c. Faux.** Avec $\sigma(X) = 3$ et $\sigma(Y) = 4$:
   $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
   $\sigma(X + Y) = 5$, et non $3 + 4 = 7$.
4. **d. Vrai.** $V(X) = p(1-p) = \dfrac{1}{4} - \left(p - \dfrac{1}{2}\right)^2$, qui est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$, avec égalité pour $p = \dfrac{1}{2}$.
5. **e. Faux.** $X + X = 2X$, donc $V(X + X) = 4V(X)$. Pour X de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, $V(X) = \dfrac{1}{4}$ mais $V(2X) = 1$, et non $\dfrac{1}{2}$.
6. **f. Vrai.** $\sigma(M_{100}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$:
   $\frac{5}{\sqrt{100}} = 0{,}5$

---

5 **Dans un restaurant, chaque client choisit, indépendamment des autres, un menu à 12 € avec la probabilité 0,5, à 18 € avec la probabilité 0,3, à 25 € avec la probabilité 0,2. Un soir, 40 clients se présentent. On note $X_1, \dots, X_{40}$ les prix payés, S la recette de la soirée et $M = \dfrac{S}{40}$ le prix moyen.**

1. **a.** Les 40 clients choisissent indépendamment, selon la même loi : $(X_1, \dots, X_{40})$ est un **échantillon de taille 40** de cette loi.
2. **b.** Espérance :
   $E(X_1) = 12 \times 0{,}5 + 18 \times 0{,}3 + 25 \times 0{,}2 = 16{,}4$
3. $E(X_1^2) = 144 \times 0{,}5 + 324 \times 0{,}3 + 625 \times 0{,}2 = 294{,}2$, puis König-Huygens :
   $V(X_1) = 294{,}2 - 16{,}4^2 = 25{,}24$
   $\sigma(X_1) = \sqrt{25{,}24} \approx 5{,}02$ €.
4. **c.** Par linéarité, $E(S) = 40 \times 16{,}4 = 656$ € ; les X_i étant indépendantes :
   $V(S) = 40 \times 25{,}24 = 1009{,}6$
   $\sigma(S) = \sqrt{1009{,}6} \approx 31{,}77$ €.
5. **d.** $E(M) = E(X_1) = 16{,}4$ € et
   $\sigma(M) = \frac{\sqrt{25{,}24}}{\sqrt{40}} \approx 0{,}79$
   conclusion : le prix moyen de la soirée a pour espérance 16,40 € et fluctue bien moins qu'un prix isolé, avec un écart type d'environ 0,79 € contre 5,02 €.

---

6 **Repérer l'erreur. On lance deux dés équilibrés, de résultats X_1 et X_2, et l'on pose $D = X_1 - X_2$. On rappelle que $V(X_1) = V(X_2) = \dfrac{35}{12}$. Un élève écrit : « X_1 et X_2 ont la même loi, donc $V(D) = V(X_1) - V(X_2) = 0$: D est constante. »**

1. **a.** D n'est pas constante : elle vaut 0 pour le résultat (3, 3) et 5 pour (6, 1). Sa variance ne peut donc pas être nulle.
2. **b.** L'erreur : $D = X_1 + (-1)X_2$, et le coefficient -1 sort de la variance **au carré**. Les deux lancers étant indépendants :
   $V(D) = \frac{35}{12} + (-1)^2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$
3. **c.** Par linéarité, $E(D) = 3{,}5 - 3{,}5 = 0$, puis :
   $\sigma(D) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}42$
4. Conclusion : $V(D) = \dfrac{35}{6}$, comme pour $X_1 + X_2$: une différence de variables indépendantes se disperse autant que leur somme.

---

7 **Algorithmique. On simule des lancers d'un dé équilibré en Python : `from random import randint`, puis `def echantillon(n): return [randint(1, 6) for k in range(n)]`. Pour un lancer, $\mu = 3{,}5$ et $V = \dfrac{35}{12}$.**

1. **a.** Une liste, construite en compréhension, de n entiers tirés au hasard entre 1 et 6, indépendamment : la réalisation d'un échantillon de taille n de la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.
2. **b.** On parcourt la liste en cumulant : `def moyenne(L):`, puis, dans le corps de la fonction, `s = 0`, `for x in L: s = s + x` et enfin `return s / len(L)`.
3. **c.** $E(M_{100}) = \mu = 3{,}5$ et
   $\sigma(M_{100}) = \dfrac{\sqrt{35/12}}{\sqrt{100}} \approx 0{,}17$
   les valeurs renvoyées varient d'un appel à l'autre, autour de 3,5, avec un écart type d'environ 0,17.
4. **d.** $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}1 \iff V(M_n) \leqslant 0{,}01 \iff \dfrac{35}{12n} \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{35}{0{,}12}$, avec
   $\frac{35}{0{,}12} \approx 291{,}67$
   conclusion : le plus petit entier est $n = 292$ lancers.

---

8 **On place au hasard trois boules dans trois urnes : chaque boule va dans l'une des trois urnes avec la même probabilité, indépendamment des autres. N est le nombre d'urnes restées vides. Pour $i = 1, 2, 3$, U_i vaut 1 si l'urne i est vide, 0 sinon.**

1. **a.** Chaque urne vide ajoute 1 au compte : $N = U_1 + U_2 + U_3$. L'urne 1 est vide si chacune des trois boules, indépendamment, va dans l'une des deux autres :
   $P(U_1 = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
2. **b.** Chaque U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{8}{27}$. Par linéarité, sans aucune hypothèse d'indépendance :
   $E(N) = 3 \times \frac{8}{27} = \frac{8}{9}$
3. **c.** Les $3^3 = 27$ répartitions sont équiprobables. $N = 0$ pour les $3 \times 2 \times 1 = 6$ où chaque urne reçoit une boule ; $N = 2$ pour les 3 où les boules sont toutes dans la même urne ; $N = 1$ pour les 18 autres. On retrouve $E(N) = \dfrac{18 + 2 \times 3}{27} = \dfrac{8}{9}$, puis :
   $V(N) = \frac{18+4\times3}{27} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}$
4. **d.** $V(U_i) = \dfrac{8}{27} \times \dfrac{19}{27}$, donc la somme des trois vaut :
   $3 \times \frac{8}{27} \times \frac{19}{27} = \frac{152}{243} \approx 0{,}63$
   alors que $V(N) = \dfrac{26}{81} \approx 0{,}32$. Les U_i ne sont pas indépendantes : elles dépendent des mêmes trois boules. Les trois urnes ne peuvent pas être vides à la fois, alors que $P(U_1 = 1) \times P(U_2 = 1) \times P(U_3 = 1) \neq 0$: l'additivité ne s'applique pas.
5. Conclusion : $E(N) = \dfrac{8}{9}$ s'obtient par linéarité, mais $V(N) = \dfrac{26}{81}$ exige la loi de N.

Corrige-toi toi-même. Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

Ce qui est évalué	Points	Ce qui fait perdre le point
Espérance par linéarité, même sans indépendance	4 pts	Chercher la loi d'une somme sans nécessité ; refuser la linéarité « faute d'indépendance » ; écrire $E(X^2) = \big(E(X)\big)^2$
Variance : $V(aX + b) = a^2V(X)$, additivité si indépendance	4 pts	$V(2X) = 2V(X)$; $V(X - Y) = V(X) - V(Y)$; additivité sans citer l'indépendance des épreuves
Écrire une variable comme somme de variables simples, de lois précisées	4 pts	Variables de Bernoulli mal définies ; loi binomiale pour des épreuves non identiques ou sans remise
Loi binomiale : E, V, σ et leur démonstration	4 pts	Oublier la racine pour σ ; preuve sans $X = X_1 + \cdots + X_n$; résultat sans unité ni phrase
Échantillon : E, V, σ de S_n et de M_n	4 pts	$\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{n}$; confondre S_n et nX_1 ; arrondir un n minimal vers le bas