EXERCICES

Sommes de variables — Espérance, variance, échantillons

Tle

Nom : _____
Classe : _____

> Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(X) = 3$, $V(X) = 4$, $E(Y) = -1$ et $V(Y) = 9$. ●○○

a. Calculer $E(2X - 3Y + 1)$.

b. Calculer $V(2X + 5)$ et $\sigma(2X + 5)$.

c. Calculer $V(X + Y)$ et $V(X - Y)$.

d. Calculer $\sigma(X + Y)$. Est-ce égal à $\sigma(X) + \sigma(Y)$?

2 Un archer tire une flèche sur chacune de trois cibles. Il atteint la première avec la probabilité 0,9, la deuxième avec 0,8 et la troisième avec 0,6 ; les trois tirs sont indépendants. X est le nombre de cibles atteintes. ●○○

a. Écrire X comme une somme de trois variables aléatoires simples, en précisant leurs lois.

b. Calculer $E(X)$.

c. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

d. X suit-elle une loi binomiale ? Justifier.

3 Une machine produit des pièces ; chacune est défectueuse avec la probabilité 0,04, indépendamment des autres. On prélève un lot de 50 pièces, assimilé à 50 tirages avec remise ; X est le nombre de pièces défectueuses du lot. ●●○

a. Justifier que X suit une loi binomiale, dont on donnera les paramètres.

b. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

c. Remplacer une pièce défectueuse coûte 12 € et le contrôle d'un lot coûte 30 €. Exprimer le coût C d'un lot en fonction de X, puis calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$.

4 **Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.** ●●○

a. Pour toutes variables X et Y sur un même univers, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

b. Pour toute variable X, $V(-X)=-V(X)$.

c. X, Y indépendantes : $\sigma(X+Y)=\sigma(X)+\sigma(Y)$.

d. Si X suit une loi de Bernoulli, alors $V(X)\leqslant\dfrac{1}{4}$.

e. Pour toute variable X, $V(X+X)=2V(X)$.

f. Pour un échantillon de taille 100 d'une loi d'écart type 5, $\sigma(M_{100})=0{,}5$.

Énoncé	Ta réponse	Pourquoi ?
a. Pour toutes variables X et Y sur un même univers, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.		
b. Pour toute variable X, $V(-X)=-V(X)$.		
c. X, Y indépendantes : $\sigma(X+Y)=\sigma(X)+\sigma(Y)$.		
d. Si X suit une loi de Bernoulli, alors $V(X)\leqslant\dfrac{1}{4}$.		
e. Pour toute variable X, $V(X+X)=2V(X)$.		
f. Pour un échantillon de taille 100 d'une loi d'écart type 5, $\sigma(M_{100})=0{,}5$.		

5 **Dans un restaurant, chaque client choisit, indépendamment des autres, un menu à 12 € avec la probabilité 0,5, à 18 € avec la probabilité 0,3, à 25 € avec la probabilité 0,2. Un soir, 40 clients se présentent. On note $X_1,\dots,X_{40}$ les prix payés, S la recette de la soirée et $M=\dfrac{S}{40}$ le prix moyen.** ●●○

a. Que représente la liste $(X_1,\dots,X_{40})$?

b. Calculer $E(X_1)$, $V(X_1)$ et $\sigma(X_1)$.

c. Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

d. Calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$, puis interpréter.

6 **Repérer l'erreur. On lance deux dés équilibrés, de résultats X_1 et X_2, et l'on pose $D=X_1-X_2$. On rappelle que $V(X_1)=V(X_2)=\dfrac{35}{12}$. Un élève écrit : « X_1 et X_2 ont la même loi, donc $V(D)=V(X_1)-V(X_2)=0$: D est constante. »** ●●○

a. Sans calcul, expliquer pourquoi la conclusion est absurde.

b. Identifier l'erreur, puis calculer $V(D)$.

c. Calculer $E(D)$ et $\sigma(D)$.

7 **Algorithmique. On simule des lancers d'un dé équilibré en Python : `from random import randint`, puis `def echantillon(n): return [randint(1, 6) for k in range(n)]`. Pour un lancer, $\mu = 3{,}5$ et $V = \dfrac{35}{12}$.** ●●●

a. Que renvoie `echantillon(n)` ? Que modélise cette liste ?

b. Écrire une fonction `moyenne(L)` qui parcourt la liste `L` et renvoie la moyenne de ses éléments.

c. On note M_n la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi d'un lancer. Calculer $E(M_{100})$ et $\sigma(M_{100})$, puis interpréter pour `moyenne(echantillon(100))`.

d. Déterminer le plus petit entier n tel que $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}1$.

8 **On place au hasard trois boules dans trois urnes : chaque boule va dans l'une des trois urnes avec la même probabilité, indépendamment des autres. N est le nombre d'urnes restées vides. Pour $i = 1, 2, 3$, U_i vaut 1 si l'urne i est vide, 0 sinon.** ●●●

a. Justifier que $N = U_1 + U_2 + U_3$, puis calculer $P(U_1 = 1)$.

b. En déduire $E(N)$, sans déterminer la loi de N.

c. Déterminer la loi de N en dénombrant les 27 répartitions, retrouver $E(N)$ et calculer $V(N)$.

d. Comparer $V(N)$ et $V(U_1) + V(U_2) + V(U_3)$. Expliquer.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Sommes de variables — Espérance, variance, échantillons ».