CORRIGÉ

Tle

# Suites et récurrence — Limites et comportement

Corrigé détaillé
8 exercices

> Ce qui est noté au contrôle, ce n'est pas le résultat seul : c'est le raisonnement posé, puis le calcul mené jusqu'au bout avec l'unité.

## 1 Déterminer la limite de chaque suite, en justifiant.

1. a. Forme $\frac{\infty}{\infty}$ ; pour $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{4 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n^2}}$, et par quotient :
$$\frac{4 - 0}{2 + 0} = 2$$
2. b. Forme $\infty - \infty$ ; $b_n = n^2(n - 5)$, produit de deux suites qui tendent vers $+\infty$ : $b_n \to +\infty$.
3. c. $0 < 0{,}5 < 1$, donc $0{,}5^n \to 0$, et :
$$2 \times 0 - 7 = -7$$
4. d. $d_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ; les deux raisons sont entre $-1$ et 1, donc :
$$0 + 5 \times 0 = 0$$
5. Conclusion : $\lim a_n = 2$, $\lim b_n = +\infty$, $\lim c_n = -7$, $\lim d_n = 0$.

## 2 Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1. a. $u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4$ et $u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10$.
$$3 \times 4 - 2 = 10$$
2. b. Soit $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n = 3^n + 1$ ». Initialisation : $3^0 + 1 = 2 = u_0$.
$$3^0 + 1 = 2$$
3. Hérédité : soit $n \geq 0$ tel que $u_n = 3^n + 1$. Alors $u_{n+1} = 3\left(3^n + 1\right) - 2 = 3^{n+1} + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$ : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
4. Par récurrence, $u_n = 3^n + 1$ pour tout $n$ (contrôle : $3^2 + 1 = 10 = u_2$).
$$3^2 + 1 = 10$$
5. c. $3 > 1$, donc $3^n \to +\infty$, et par somme $\lim u_n = +\infty$.

## 3 Déterminer la limite de chaque suite à l'aide d'une comparaison ou d'un encadrement.

1. a. $-1 \leq \sin n \leq 1$ ; on ajoute $3n$, puis on divise par $n + 2 > 0$ : $\dfrac{3n - 1}{n + 2} \leq u_n \leq \dfrac{3n + 1}{n + 2}$.
2. En factorisant par $n$, les deux bornes tendent vers la même limite ; par les gendarmes, $\lim u_n = 3$.
$$\frac{3 - 0}{1 + 0} = 3$$
3. b. $\cos n \leq 1$, donc $-2\cos n \geq -2$ (on multiplie par $-2$ : le sens change), et $v_n \geq n - 2$.
4. $n - 2 \to +\infty$ : par comparaison, $\lim v_n = +\infty$.
5. c. $-\dfrac{1}{n^2 + 1} \leq w_n \leq \dfrac{1}{n^2 + 1}$, et les deux bornes tendent vers 0 : par les gendarmes, $\lim w_n = 0$.

## 4 Vrai ou faux ? Justifier par une propriété du cours, ou par un contre-exemple.

1. a. Faux : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n + 1}$ est croissante et converge vers 1.
2. b. Faux : $\left((-1)^n\right)$ est bornée par $-1$ et 1, et n'a pas de limite.
3. c. Vrai : $v_n$ est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$ ; c'est le théorème de comparaison.
4. d. Faux : $u_n = n + 2 \times (-1)^n$ tend vers $+\infty$ (car $u_n \geq n - 2$), mais $u_{2k+1} = 2k - 1 < u_{2k} = 2k + 2$ pour tout $k$ : elle n'est croissante à partir d'aucun rang.
5. e. Vrai : c'est le comportement de $\left(q^n\right)$, démontré avec l'inégalité de Bernoulli et les gendarmes.

**5** **Repérer l'erreur. Un élève veut démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $2^n \geq n+2$. Il écrit : « Supposons $2^n \geq n+2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n+4 \geq n+3$. Donc la propriété est vraie pour tout $n$. »**

1. a. $n=0$ : $1 \geq 2$ est faux ; $n=1$ : $2 \geq 3$ est faux ; $n=2$ : $4 \geq 4$ est vrai.
   $2^2 = 2+2 = 4$
2. L'hérédité est juste, mais il manque l'**initialisation** : la propriété est fausse aux rangs 0 et 1, la conclusion « pour tout $n$ » est fausse.
3. b. Initialisation au rang $n_0 = 2$ : $2^2 = 4 \geq 2+2$, vrai.
4. Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $2^n \geq n+2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n+4 \geq n+3$, car $n+1 \geq 0$.
5. Par récurrence, $2^n \geq n+2$ pour tout entier $n \geq 2$, et seulement pour ceux-là parmi les entiers naturels.

---

**6** **Modéliser. Un étang compte 2 000 poissons au 1er janvier 2026. Chaque année, 30 % des poissons disparaissent (pêche, prédateurs), et l'on en réintroduit 2 000 à la fin de l'année. On note $u_n$ le nombre de poissons, en milliers, au 1er janvier de l'année $2026+n$ ; ainsi $u_0 = 2$.**

1. a. Il reste 70 % des poissons, auxquels s'ajoutent 2 milliers : $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 2$.
   $1 - 0{,}3 = 0{,}7$
2. b. $v_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 2 - \dfrac{20}{3} = 0{,}7\,u_n - \dfrac{14}{3} = 0{,}7\left(u_n - \dfrac{20}{3}\right) = 0{,}7\,v_n$ : $(v_n)$ est géométrique de raison $0{,}7$.
   $0{,}7 \times \dfrac{20}{3} = \dfrac{14}{3}$
3. $v_0 = 2 - \dfrac{20}{3} = -\dfrac{14}{3}$, donc $u_n = \dfrac{20}{3} - \dfrac{14}{3} \times 0{,}7^n$.
   $2 - \dfrac{20}{3} = -\dfrac{14}{3}$
4. c. $0 < 0{,}7 < 1$ : $0{,}7^n \to 0$ et $\lim u_n = \dfrac{20}{3} \approx 6{,}667$. À long terme, l'étang compte environ 6 667 poissons.
   $\dfrac{20}{3} \approx 6{,}667$
5. d. $u_n > 6 \iff \dfrac{14}{3} \times 0{,}7^n < \dfrac{2}{3} \iff 0{,}7^n < \dfrac{1}{7}$, avec $\dfrac{1}{7} \approx 0{,}143$.
   $\dfrac{1}{7} \approx 0{,}143$
6. $0{,}7^5 \approx 0{,}168 > \dfrac{1}{7}$ et $0{,}7^6 \approx 0{,}118 < \dfrac{1}{7}$ ; la suite est croissante, car $0{,}7^n$ décroît.
   $0{,}7^6 \approx 0{,}118$
7. Le premier rang est $n = 6$ : l'étang compte plus de 6 000 poissons à partir du 1er janvier 2032.

---

**7** **Soit $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.**

1. a. $u_1 = \sqrt{4} = 2$ et $u_2 = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.
   $\sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$
2. b. Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$.
3. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, alors $4 \leq 3u_n + 4 \leq 3u_{n+1} + 4 \leq 16$ ; la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.
   $\sqrt{16} = 4$
4. Par récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ pour tout $n$.
5. c. $(u_n)$ est croissante et majorée par 4 : elle converge vers $\ell$. Par passage à la limite dans $0 \leq u_n \leq 4$, $0 \leq \ell \leq 4$.
6. d. $u_{n+1}^2 = 3u_n + 4$ ; par opérations, $u_{n+1}^2 \to \ell^2$ et $3u_n + 4 \to 3\ell + 4$ ; la limite est unique, donc $\ell^2 = 3\ell + 4$.
7. $\ell^2 - 3\ell - 4 = (\ell - 4)(\ell + 1) = 0$, d'où $\ell = 4$ ou $\ell = -1$ ; or $\ell \geq 0$, donc $\ell = 4$.
   $4^2 - 3 \times 4 - 4 = 0$

---

**8** **Approcher le nombre e. Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = 1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/n!$, où $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.**

1. a. Initialisation : $1! = 1 \geq 2^0 = 1$. Hérédité : si $k! \geq 2^{k-1}$ avec $k \geq 1$, alors $(k+1)! = (k+1) \times k! \geq 2 \times 2^{k-1} = 2^k$, car $k + 1 \geq 2$.
2. Par récurrence, $k! \geq 2^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$, donc $\dfrac{1}{k!} \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
3. b. En sommant pour $k$ de 1 à $n$ : $s_n \leq 1 + \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$, somme géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
4. Elle vaut $\dfrac{1 - 0{,}5^n}{1 - 0{,}5} = 2\left(1 - 0{,}5^n\right) < 2$, donc $s_n < 1 + 2 = 3$.
5. c. $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ : $(s_n)$ est croissante.
6. Croissante et majorée par 3, $(s_n)$ converge (théorème de convergence monotone), vers une limite inférieure ou égale à 3.
7. d. $s_{10} \approx 2{,}7182818$, à comparer à $\mathrm{e} \approx 2{,}7182818$ : la somme arrêtée à $\dfrac{1}{10!}$ donne déjà sept décimales exactes.

---

**Corrige-toi toi-même.** Compte tes points exercice par exercice : c'est ainsi qu'on voit où l'on perd, et ce n'est presque jamais là où on le croit.

| Ce qui est évalué | Points | Ce qui fait perdre le point |
|---|---|---|
| Rédiger une récurrence complète | 4 pts | Initialisation absente ; hypothèse posée « pour tout $n$ » ; conclusion non écrite |
| Lever une forme indéterminée | 3 pts | « $\infty - \infty = 0$ » ; une limite annoncée sans factorisation par le terme prépondérant |
| Conclure par comparaison ou par les gendarmes | 3 pts | Une majoration utilisée pour $+\infty$ ; des bornes de limites différentes ; un encadrement multiplié par un négatif sans changer le sens |
| Limite de $(q^n)$ et d'une suite géométrique | 2 pts | Une limite donnée à $(q^n)$ pour $q \leq -1$ ; $q$ non comparé à $-1$ et à 1 |
| Convergence monotone et calcul de la limite | 4 pts | Le théorème cité avec une seule hypothèse ; le majorant pris pour la limite |
| Modéliser une évolution et chercher un seuil | 4 pts | La relation de récurrence mal traduite ; un seuil sans vérification du rang précédent, ou non traduit en année |