COURS

Suites et récurrence — Limites et comportement

Tle

Programme de terminale générale, enseignement de spécialité — BO spécial n°8 du 25 juillet 2019

En terminale, on se demande **où va** une suite. Deux outils portent le chapitre : le **raisonnement par récurrence**, qui démontre une propriété pour tous les entiers en deux vérifications, et la **limite**, qui décrit les termes quand n devient grand. **On ne conclut jamais sur une limite en regardant quelques termes : on cite une limite de référence, une opération, une comparaison, ou le théorème des suites monotones bornées.**

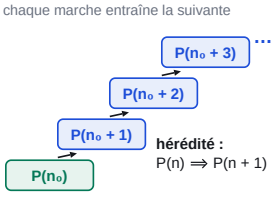
1 Le raisonnement par récurrence

PROPRIÉTÉ

Principe de récurrence (admis). Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n, et n_0 un entier naturel. Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si, pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraîne $\mathcal{P}(n+1)$ vraie (**hérédité**), alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. On l'emploie dès que u_{n+1} s'exprime à partir de u_n : formule explicite, inégalité, sens de variation.

RÉDIGER UNE RÉCURRENCE

1. **Énoncer** la propriété $\mathcal{P}(n)$ et le rang de départ n_0, en une phrase.
2. **Initialisation** : vérifier $\mathcal{P}(n_0)$ par un calcul explicite.
3. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$ **fixé** tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie (hypothèse de récurrence) ; démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ en partant de la relation entre u_{n+1} et u_n.
   jamais « supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout n » : ce serait supposer le résultat. L'hypothèse doit servir dans le calcul.
4. **Conclure** : « par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$ ».



Initialisation, puis hérédité : la propriété se propage de rang en rang, à partir de n_0 et pas avant.

EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

1. **Initialisation.** $2^{0+2} - 3 = 1 = u_0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. **Hérédité.** Soit $n \geq 0$ tel que $u_n = 2^{n+2} - 3$. Alors $u_{n+1} = 2\left(2^{n+2} - 3\right) + 3 = 2^{n+3} - 6 + 3 = 2^{n+3} - 3$: c'est $\mathcal{P}(n+1)$.

Par récurrence, $u_n = 2^{n+2} - 3$ pour tout entier naturel n.

PIÈGE

Ne démontrer que l'hérédité. — « $10^n + 1$ est un multiple de 9 » est héréditaire : si $10^n + 1 = 9k$, alors $10^{n+1} + 1 = 10\left(10^n + 1\right) - 9 = 9(10k - 1)$. Pourtant elle n'est vraie pour **aucun** n : $10^0 + 1 = 2$, $10^1 + 1 = 11$…

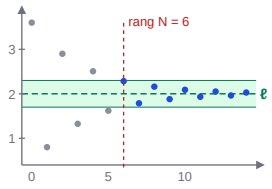
Ce que ça coûte : sans initialisation, la démonstration ne prouve rien : la question est perdue.

Le réflexe : écrire l'initialisation, même quand elle paraît évidente : c'est elle qui lance la chaîne.

2 Limite d'une suite

DÉFINITION

La suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle $[A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang : aussi grand que soit A, il existe un entier N tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq N$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. De même, (u_n) **tend vers** $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;A]$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. La suite (u_n) **converge vers le réel** ℓ si tout intervalle **ouvert** contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Ce réel est unique (admis) : c'est **la limite** de la suite, notée $\lim u_n = \ell$. Une suite qui ne converge pas est **divergente** : elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou n'a pas de limite, comme $\left((-1)^n\right)$, qui vaut alternativement 1 et -1.



La suite n'est pas monotone : seuls comptent les termes à partir du rang N. Pour $+\infty$, l'intervalle devient $[A\,;+\infty[$.

PROPRIÉTÉ

Suite croissante non majorée (démontré). Une suite est **majorée** s'il existe un réel M tel que $u_n \leq M$ pour tout n, **minorée** s'il existe m tel que $u_n \geq m$ pour tout n, **bornée** si elle est les deux. Toute suite **croissante non majorée** tend vers $+\infty$. *Preuve* : soit A un réel. La suite n'est pas majorée, donc A ne la majore pas : il existe un rang N tel que $u_N > A$. La suite est croissante, donc pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$: tous les termes sont dans $[A\,;+\infty[$ à partir du rang N. De même, une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$. **Limites de référence** : pour tout entier $k \geq 1$, n^k et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$, $\dfrac{1}{n^k}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ vers 0 ($\sqrt{n} \geq A$ dès que $n \geq A^2$, pour $A > 0$).

RÈGLE

Opérations (admises). Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n v_n \to \ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$. Avec l'infini, le tableau donne les cas utiles. Quatre formes, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$, ne permettent **aucune conclusion directe** : ce sont les **formes indéterminées**.

lim u_n	lim v_n	lim $(u_n + v_n)$	lim $(u_n \times v_n)$	lim (u_n / v_n)
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$	ℓ / ℓ' si $\ell' \neq 0$
$\ell \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$; $-\infty$ si $\ell < 0$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI (∞ / ∞)**
$+\infty$	$-\infty$	**FI ($\infty - \infty$)**	$-\infty$	**FI (∞ / ∞)**
$\ell \neq 0$	0, avec $v_n > 0$	ℓ	0	$+\infty$ si $\ell > 0$; $-\infty$ si $\ell < 0$
0	$+\infty$	$+\infty$	**FI ($0 \times \infty$)**	0
0	0	0	0	**FI (0 / 0)**

FI : forme indéterminée. Avec $-\infty$, même tableau en appliquant la règle des signes.

LEVER UNE FORME INDÉTERMINÉE

1. **Nommer la forme** : calculer la limite de chaque morceau ; si l'on tombe sur un des quatre cas, l'écrire.
2. **Factoriser par le terme prépondérant** : la plus haute puissance de n dans un polynôme ou un quotient ; la puissance de plus grande raison dans une somme de suites géométriques, comme $3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \to +\infty$.
3. **Conclure par opérations** sur l'écriture factorisée. Exemple : $\dfrac{2n^2 - 5n}{n^2 + 1} = \dfrac{2 - \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}$ pour $n \geq 1$; $\dfrac{5}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ tendent vers 0, donc la suite tend vers $\dfrac{2}{1} = 2$.

PROPRIÉTÉ

Comparaison (démontré). Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$. *Preuve* : soit A un réel. Il existe un rang N_1 à partir duquel $v_n \geq A$, et un rang N_2 à partir duquel $u_n \geq v_n$; pour n supérieur à N_1 et à N_2, $u_n \geq v_n \geq A$. De même, si $u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim w_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$. **Théorème des gendarmes (admis).** Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. **Passage à la limite (admis)** : si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si les deux suites convergent, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$; une inégalité stricte devient large.

EXEMPLE

Encadrer pour conclure. Déterminer les limites de $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{n + 1}$ et de $v_n = n^2 + 3\cos n$.

1. On isole le morceau sans limite : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$; on ajoute $2n$, puis on divise par $n + 1 > 0$ (un nombre positif ne change pas le sens) : $\dfrac{2n - 1}{n + 1} \leq u_n \leq \dfrac{2n + 1}{n + 1}$; les deux bornes tendent vers 2 (factoriser par n), donc par les gendarmes $u_n \to 2$.
2. $\cos n \geq -1$, donc $v_n \geq n^2 - 3$, et $n^2 - 3 \to +\infty$: une seule inégalité suffit, par comparaison $v_n \to +\infty$.

$\lim u_n = 2$ et $\lim v_n = +\infty$.

PROPRIÉTÉ

Inégalité de Bernoulli (démontrée par récurrence). Pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$. *Preuve* : $\mathcal{P}(n)$: « $(1+a)^n \geq 1+na$ ». Initialisation : $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times a$. Hérédité : si $(1+a)^n \geq 1+na$, on multiplie par $1+a > 0$: $(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$, car $na^2 \geq 0$. **Comportement de (q^n) (démontré).** Si $q > 1$, on écrit $q = 1 + a$ avec $a > 0$: $q^n \geq 1 + na$ et $1 + na \to +\infty$, donc, par comparaison, $\lim q^n = +\infty$. Si $q = 1$, la suite est constante égale à 1. Si $0 < |q| < 1$, $\dfrac{1}{|q|} > 1$ donne $\dfrac{1}{|q|^n} \to +\infty$, d'où $|q|^n \to 0$; comme $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$, les gendarmes donnent $\lim q^n = 0$ (le cas $q = 0$ est immédiat). Si $q \leq -1$, les termes changent de signe à chaque rang en restant de valeur absolue au moins 1 : (q^n) n'a **pas de limite**.



Tout se lit sur la position de q par rapport à -1 et à 1. Pour $u_n = u_0\, q^n$ avec $u_0 \neq 0$, même conclusion, au signe de u_0 près pour $q > 1$.

PROPRIÉTÉ

Limites de l'exponentielle (démontrées). Comme $\mathrm{e} > 1$, $\mathrm{e}^n \to +\infty$: pour tout réel A, il existe un entier N tel que $\mathrm{e}^N > A$, et, la fonction exponentielle étant croissante, $\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^N > A$ pour tout $x \geq N$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Puis $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ et $-x \to +\infty$ quand $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Les limites de fonctions sont étudiées dans la fiche « Limites et continuité ».

PIÈGE

Écrire $\lim\left(n^2 - 10n\right) = +\infty - \infty = 0$. — $\infty - \infty$ n'est pas un calcul : $n^2 - 10n = n(n-10) \to +\infty$, mais $n - n^2 \to -\infty$ et $(n+3) - n \to 3$.

Ce que ça coûte : la limite est fausse, et toute la suite de la question avec.

Le réflexe : écrire « forme indéterminée », puis factoriser par le terme prépondérant.

PIÈGE

Conclure $\lim u_n = +\infty$ de $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = +\infty$. — une majoration ne pousse pas vers le haut : $u_n = -n$ vérifie $u_n \leq n$ et tend vers $-\infty$.

Ce que ça coûte : le théorème est mal appliqué : la conclusion ne vaut rien.

Le réflexe : pour $+\infty$, **minorer** u_n par une suite qui tend vers $+\infty$; pour $-\infty$, le majorer.

PIÈGE

Écrire $\lim(-2)^n = -\infty$, « puisque $-2 < -1$ ». — $(-2)^n$ vaut 1, -2, 4, -8, 16… : les termes changent de signe à chaque rang, la suite n'a pas de limite.

Ce que ça coûte : une limite inventée là où il n'y en a pas : la réponse est fausse.

Le réflexe : pour $q < 0$, regarder $|q|$: $|q| < 1$ donne 0, $|q| \geq 1$ donne « pas de limite ».

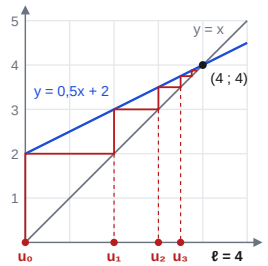
3 Suites monotones, modélisation et seuils

PROPRIÉTÉ

Théorème de convergence monotone (admis). Toute suite **croissante et majorée** converge ; toute suite **décroissante et minorée** converge. Le théorème donne l'**existence** de la limite, pas sa valeur : si (u_n) est croissante, majorée par M, de limite ℓ, on sait seulement que $u_n \leq \ell \leq M$ pour tout n (passage à la limite). Réciproques fausses, contre-exemples : $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge vers 0 sans être monotone, $n + 2 \times (-1)^n$ tend vers $+\infty$ sans être croissante ; et $\left((-1)^n\right)$ est bornée sans converger.

MONTRER QU'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE CONVERGE

1. **Conjecturer** à la calculatrice le sens de variation et des bornes.
2. **Démontrer par récurrence** l'encadrement et le sens de variation ensemble, par exemple $\mathcal{P}(n)$: « $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq b$ ».
   pour passer de u_n à $u_{n+1} = f(u_n)$, on applique une fonction f **croissante** à chaque membre : elle conserve l'ordre.
3. **Citer le théorème avec ses deux hypothèses** : croissante **et** majorée (ou décroissante **et** minorée), donc convergente.
4. **Trouver la limite** : si $u_{n+1} = au_n + b$, les suites (u_{n+1}) et (u_n) ont la même limite ℓ, et les opérations donnent $\ell = a\ell + b$.



Escalier de $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 2$, $u_0 = 0$: les termes croissent vers 4.

EXEMPLE

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(1) $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ». Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$.

(2) Hérédité : si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, on multiplie par $0{,}5 > 0$ et on ajoute 2 : $2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$, a fortiori avec 0 à gauche.

(3) (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge vers un réel ℓ, qui vérifie $\ell = 0{,}5\,\ell + 2$, soit $0{,}5\,\ell = 2$ et $\ell = 4$.

(u_n) est croissante et converge vers 4.

EXEMPLE

Suite arithmético-géométrique. Un club a 1 000 adhérents en 2026 ; chaque année, 20 % partent et 300 arrivent. Soit u_n le nombre d'adhérents en $2026 + n$. Limite, et année où il dépasse 1 450 ?

(1) On garde 80 % et on ajoute 300 : $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 300$, $u_0 = 1000$. Le réel fixe vérifie $\ell = 0{,}8\,\ell + 300$, soit $\ell = 300 \div 0{,}2 = 1500$.
$300 \div 0{,}2 = 1500$

(2) On pose $v_n = u_n - 1500$ (écart au réel fixe) : $v_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 300 - 1500 = 0{,}8\,(u_n - 1500) = 0{,}8\,v_n$. (v_n) est géométrique, $v_0 = -500$, donc $u_n = 1500 - 500 \times 0{,}8^n$.

(3) $0 < 0{,}8 < 1$, donc $0{,}8^n \to 0$ et $u_n \to 1500$; u_n croît, car $0{,}8^n$ décroît.

(4) Seuil : $u_n > 1450 \iff 500 \times 0{,}8^n < 50 \iff 0{,}8^n < 0{,}1$. Or $0{,}8^{10} \approx 0{,}107$ et $0{,}8^{11} \approx 0{,}086$.

Le nombre d'adhérents augmente et se rapproche de 1 500 ; il dépasse 1 450 à partir de $n = 11$, en 2037.

recherche d'un seuil

```
def seuil(S):
    n, u = 0, 1000
    while u <= S:
        n = n + 1
        u = 0.8*u + 300
    return n

print(seuil(1450))
# affiche 11
```

La boucle tourne tant que le seuil n'est pas dépassé. Une boucle `for` approche de même la racine carrée de 2 par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, $u_0 = 1$ (onze décimales exactes dès u_4), et le nombre d'or par $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

PIÈGE

Conclure « $u_n \leq 4$, donc $\lim u_n = 4$ ». — un majorant n'est pas forcément la limite : $1 - \dfrac{1}{n+1}$ est majorée par 4 et tend vers 1.

Ce que ça coûte : une limite affirmée sans justification ne rapporte rien.

Le réflexe : le théorème donne l'existence ; la valeur vient d'un calcul, ici $\ell = a\ell + b$.

PIÈGE

Écrire `while u > S:` pour chercher le premier rang où $u_n > S$. — une boucle `while` tourne **tant que** sa condition est vraie : il faut la condition de poursuite, contraire du but. Ici, la boucle ne s'exécuterait jamais et renverrait 0.

Ce que ça coûte : le programme renvoie un rang faux : la question d'algorithmique est perdue.

Le réflexe : écrire `while u <= S:` et tester le programme à la main sur deux tours.

PIÈGE

Conclure au seuil $n = 10$ parce que $0{,}8^{10} \approx 0{,}1$. — $0{,}8^{10} \approx 0{,}107$ est **supérieur** à $0{,}1$: l'arrondi a caché que l'inégalité est fausse au rang 10.

Ce que ça coûte : un rang décalé d'une unité : la réponse au seuil est fausse.

Le réflexe : comparer avec assez de décimales, et vérifier le rang trouvé **et** le précédent.

À VÉRIFIER

- Ma récurrence a-t-elle ses quatre temps, avec n **fixé** dans l'hérédité ?
- Ai-je **nommé** chaque forme indéterminée, puis factorisé par le terme prépondérant ?
- Ai-je cité le théorème avec ses **deux** hypothèses, puis calculé la limite à part ?
- Mon seuil est-il le **premier** rang, vérifié avec le précédent et traduit dans le contexte ?

À RETENIR

- Récurrence : initialisation, hérédité avec n fixé, conclusion ; sans initialisation, rien n'est prouvé.
- Formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$; on factorise par le terme prépondérant.
- $q^n \to +\infty$ si $q > 1$, $\to 0$ si $-1 < q < 1$, pas de limite si $q \leq -1$.
- Croissante et majorée, ou décroissante et minorée : convergente ; la valeur de la limite se calcule à part.