EXERCICES

Tle

Suites et récurrence — Limites et comportement

Nom : _____
Classe : _____

Au contrôle, une réponse juste sans calcul ne rapporte presque rien : chaque problème se rédige en quatre temps — **justifier**, **poser** l'égalité, **mener le calcul** jusqu'au bout, **conclure** par une phrase avec l'unité. La place réservée est dimensionnée pour ces quatre temps.

1 Déterminer la limite de chaque suite, en justifiant. ●○○

a. $a_n = \dfrac{4n^2 - n}{2n^2 + 3}$

b. $b_n = n^3 - 5n^2$

c. $c_n = 2 \times 0{,}5^n - 7$

d. $d_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n}$

2 Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2$. ●○○

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + 1$.

c. En déduire la limite de (u_n).

3 Déterminer la limite de chaque suite à l'aide d'une comparaison ou d'un encadrement. ●●○

a. $u_n = \dfrac{3n + \sin n}{n + 2}$

b. $v_n = n - 2\cos n$

c. $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 1}$

4 **Vrai ou faux ? Justifier par une propriété du cours, ou par un contre-exemple.** ●●○

a. « Toute suite croissante tend vers $+\infty$. »

b. « Une suite bornée est convergente. »

c. « Si $u_n \leq v_n$ pour tout n et $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$. »

d. « Une suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang. »

e. « Si $-1 < q < 1$, la suite (q^n) converge vers 0. »

5 **Repérer l'erreur. Un élève veut démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq n+2$. Il écrit : « Supposons $2^n \geq n+2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n+4 \geq n+3$. Donc la propriété est vraie pour tout n. »** ●●○

a. Tester la propriété pour $n = 0$, 1 et 2. Que manque-t-il au raisonnement de l'élève ?

b. Pour quels entiers la propriété est-elle vraie ? Le démontrer par une récurrence complète.

6 **Modéliser. Un étang compte 2 000 poissons au 1er janvier 2026. Chaque année, 30 % des poissons disparaissent (pêche, prédateurs), et l'on en réintroduit 2 000 à la fin de l'année. On note u_n le nombre de poissons, en milliers, au 1er janvier de l'année $2026+n$; ainsi $u_0 = 2$.** ●●○

a. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}7\,u_n + 2$.

b. On pose $v_n = u_n - \dfrac{20}{3}$. Montrer que (v_n) est géométrique, et en déduire u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (u_n) et l'interpréter.

d. À partir de quelle année l'étang compte-t-il plus de 6 000 poissons ?

7 **Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.** ●●●

a. Calculer u_1 et u_2 (valeur approchée à 10^{-2}).

b. Démontrer par récurrence que, pour tout n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

c. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ de $[0\,;4]$.

d. En élevant au carré la relation de récurrence, montrer que $\ell^2 = 3\ell + 4$, puis déterminer ℓ.

8 **Approcher le nombre e. Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = 1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/n!$, où $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k$.** ●●●

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.

b. En déduire que $s_n \leq 1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$, puis que $s_n < 3$.

c. Montrer que (s_n) est croissante, et conclure.

d. On admet que la limite est e. À la calculatrice, donner s_{10} à 10^{-7} près et le comparer à e.

Corrigé détaillé sur **progresschool.fr** — chapitre « Suites et récurrence — Limites et comportement ».